

ИПМ им. М. В. Келдыша РАН

**XXII ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ
«ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ
И КОНСТРУИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ
АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ»,
посвященная памяти К. И. Бабенко**

3–8 сентября 2018 г.
Новороссийск, Абрау–Дюрсо

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Москва – 2018

УДК 51, 53
ББК 22.19

Тезисы докладов XXII Всероссийской конференции «Теоретические основы и конструирования численных алгоритмов решения задач математической физики», посвященной памяти К. И. Бабенко (Дурсо, 3–8 сентября, 2018). – М: ИПМ им. М. В. Келдыша, 2018. – 104 с.

АННОТАЦИЯ

Конференция включает лекции и доклады по вычислительной математике, аэро-гидродинамике, молекулярной биологии. Обсуждаются направления развития алгоритмов математической физики и параллельных вычислительных технологий. Также рассматриваются теоретические вопросы дифференциальных уравнений, точные и асимптотические представления решений краевых задач и динамических систем.

Proceedings of the XXII All-Russian Conference «Theoretical bases and generation of numerical algorithms of solving mathematical physics problems», devoted to K. I. Babenko (Durso, 3–8 September, 2018)

ABSTRACT

The conference includes lectures and reports on computational mathematics, aero-hydrodynamic, molecular biology. The development of mathematical physics algorithms and the parallel computational technologies are discussed. The theoretical problems on differential equations, exact and asymptotic solutions of boundary problems are considered.

Оргкомитет XXII Конференции выражает признательность Российскому фонду фундаментальных исследований (грант 18-01-20065) за поддержку этого мероприятия.



Редакционная коллегия: А.Л. Афендииков, Г.В. Долголева, А.В. Дьяченко, В.Т. Жуков,
В.Г. Лысов, Н.Д. Новикова, Ю.Г. Рыков

Федеральное государственное учреждение
«Федеральный исследовательский центр

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук»

Москва, 2018

ПРОГРАММНЫЙ И ОРГАНИЗАЦИОННЫЙ КОМИТЕТЫ

Председатель Оргкомитета XXII конференции:

Афендииков Андрей Леонидович, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва

Программный комитет:

А. Л. Афендииков, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва (*председатель*);

В. Т. Жуков, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва (*зам. председателя*);

А. И. Аптекарев, чл.-корр. РАН, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН;

В. И. Бердышев, академик РАН, ИММ им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург;

К. В. Брушлинский, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва;

Ю. Н. Дерюгин, РФЯЦ ВНИИЭФ, Саров;

Г. В. Долголева, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва;

В. А. Левин, академик РАН, ИАПУ ДВО РАН, Владивосток;

А. Е. Луцкий, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва;

Г. В. Муратова, ИММиКН, ЮФУ, Ростов-на-Дону;

В. Ф. Тишкин, чл.-корр. РАН, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва;

М. Ю. Филимонов, ИММ им. Н. Н. Красовского УрО РАН, Екатеринбург;

Б. Н. Четверушкин, академик РАН, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва

Локальный оргкомитет:

А.Л. Афендииков, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (*председатель*)

В.Т. Жуков, ИПМ им. М.В.Келдыша РАН (*зам. председателя*)

Н.Г. Афендикова, ИПМ им. М.В.Келдыша РАН

Е.В. Боровик, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН

М.А. Бочев, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН

А.А. Давыдов, ИПМ им. М.В.Келдыша РАН

Г.В. Долголева, ИПМ им. М.В.Келдыша РАН

А.В. Дьяченко, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН

Н.А. Зайцев, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН

М.А. Лапик, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН

В.Г. Лысов, ИПМ им. М.В.Келдыша РАН

Л.И. Михайлова, ИПМ им. М.В.Келдыша РАН

К.Е. Никитин, ИПМ им. М.В.Келдыша РАН

Н.Д. Новикова, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН

Ю.Г. Рыков, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН

Т.А. Сушкевич, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН

А.А. Таюрский, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН

ОГЛАВЛЕНИЕ

<p>Ю.А. Агеева, С.П. Баутин МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОСХОДЯЩИХ ЗАКРУЧЕННЫХ ПОТОКОВ, ИМЕЮЩИХ МЕСТО В ТРОПИЧЕСКИХ ЦИКЛОНАХ.....</p>	12
<p>А.В. Александров, Л.В. Дородницын, А.П. Дубень ГЕНЕРАЦИЯ ТРЕХМЕРНЫХ СИНТЕТИЧЕСКИХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОЛЕЙ НА ОСНОВЕ РАНДОМИЗИРОВАННОГО СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА.....</p>	13
<p>А.К. Алексеев, А.Е.Бондарев К ОЦЕНКЕ НОРМЫ ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ НА АНСАМБЛЕ НЕЗАВИСИМЫХ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ.....</p>	14
<p>С.С. Андреев, С.А. Дбар, А.О. Лацис, Е.А. Плоткина FPGA-УСКОРИТЕЛИ В ЗАДАЧАХ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ И ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ.....</p>	15
<p>Н.Г. Афендикова СТРАНИЦЫ БИОГРАФИИ К.И.БАБЕНКО. К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ.....</p>	16
<p>А.В. Бабаков ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС «FLUX» ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ АЭРОГИДРОДИНАМИКИ. АЛГОРИТМЫ, ПРИМЕРЫ РЕАЛИЗАЦИИ.....</p>	17
<p>Т.Ю. Балабина, Ю.Н. Дерюгин, Е.А. Кудряшов ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СПУТНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ПОТОКОВ В ТРУБЕ.....</p>	17
<p>Е.А.Берендеев, А.А. Ефимова, Г.И. Дудникова МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТКРЫТЫХ ПУЧКОВО-ПЛАЗМЕННЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ЧАСТИЦ В ЯЧЕЙКАХ.....</p>	18
<p>Ю.А. Блинков, В.П. Гердт О РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КДВ.....</p>	19
<p>Ю.А. Блинков, В.П. Гердт, И.А. Панкратов ЧИСЛЕННОЕ СРАВНЕНИЕ СИЛЬНО СОГЛАСОВАННЫХ СХЕМ.....</p>	20

А.Б. Богатырев РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ПОД СИСТЕМОЙ ПЛОТИН И ТЭТА ФУНКЦИИ РИМАНА.....	21
М.А. Бочев, В.Ј. Geurts, G.L. Kooij О РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИИ ПО ВРЕМЕНИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СХЕМ РЕШЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ЗАДАЧ.....	22
Н.В. Быков МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРНО-ВОЛНОВОГО ПОДГОНА ПРИ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОМ МЕТАНИИ ТЕЛ.....	23
Д.А. Быковских, В.А. Галкин ФИЛЬТРАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ.....	24
В.П. Варин КОМБИНАТОРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ КАК УСКОРИТЕЛИ СХОДИМОСТИ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ.....	25
Д.А. Варфоломеев, М.Н. Якимова СВЯЗЬ МОДЕЛЕЙ И МЕТОДОВ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД.....	26
Е.А. Веселова, Ю.Н. Дерюгин, В.М. Изгородин, Е.Ю. Соломатина МЕТОДИКА РАСЧЕТА ФОРМИРОВАНИЯ КРИОГЕННОГО СЛОЯ D-T СМЕСИ В СФЕРИЧЕСКОМ КОНТЕЙНЕРЕ.....	27
Е.А. Веселова, Ю.Н. Дерюгин, Д.К. Зеленский ПАКЕТ ПРОГРАММ ЛОГОС. МЕТОДИКА РАСЧЕТА ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С УЧЕТОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ПОДВИЖНЫХ НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ.....	28
М.Б. Гавриков, А.А. Таюрский БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ И УСКОРЕНИЕ ПЛАЗМЫ В КСПУ.....	30
В.А. Галкин ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ.....	31
В.А. Галкин, А.О. Дубовик МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОИСТОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ.....	33

Е.А. Генрих , М.А. Боронина, В.А. Вшивков ГИБРИДНАЯ МОДЕЛЬ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ОТКРЫТОЙ ЛОВУШКИ С ДИАМАГНИТНЫМ УДЕРЖАНИЕМ ПЛАЗМЫ.....	34
В.П. Гердт , Ю.А. Блинков ПЕРВОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ ДВУХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ СТОКСА.....	35
В.С. Гладких , А.В. Петухов ПОСТРОЕНИЕ ПРЕДСКАЗАТЕЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ВРЕМЕНИ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ.....	36
В.Н. Говорухин ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИССИПАТИВНЫХ ЭФФЕКТОВ В ЗАДАЧЕ ПРОТЕКАНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ КАНАЛ.....	36
С.К. Годунов, Д.В. Ключинский , С.В. Фортова ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ РАЗНОСТНОЙ МОДЕЛИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ СО СВОЙСТВОМ НЕУБЫВАНИЯ ЭНТРОПИИ.....	37
С.К. Годунов, М.В. Шамолин , С.В. Фортова, В.В. Шепелев ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ.....	38
В.А. Гордин КОМПАКТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ, ИМИТИРУЮЩИЕ ЗАДАЧУ КОШИ.....	39
Г.В. Долголева РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ УМЕНЬШЕНИЯ ВКЛАДЫВАЕМОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ЗАГОРАНИЯ МИШЕНЕЙ ТЯЖЕЛОИОННОГО СИНТЕЗА.....	41
А.А. Долгун РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТОРОИДАЛЬНЫХ КАТУШЕК В НИЗКОЧАСТОТНЫХ ЗАДАЧАХ.....	42
Т.В. Дудникова ДИСПЕРСИОННЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЙ БЕСКОНЕЧНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ.....	43
А.В. Дьяченко , Г.А. ван Беверн ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ И СПЕКТР ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-	

	7
ЛИУВИЛЛЯ.....	44
Е.А. Забродина РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПАДЕ РАЗРЫВА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ.....	45
Н.А. Зайцев, Б.В. Критский МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ С ДИФФУЗНЫМ МЕЖФАЗНЫМ ИНТЕРФЕЙСОМ.....	46
А.А. Злотник, Т.А. Ломоносов УСЛОВИЯ L^2 -ДИССИПАТИВНОСТИ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ КГД- РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ 1D УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ.....	47
М.А. Истомина ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЕ ЯДРО QGDFOAM В ОТКРЫТОМ ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ OPENFOAM.....	48
В.В. Калманович, М.А. Степович, Е.В. Серегина О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТРИЧНОГО МЕТОДА И МЕТОДА ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ БЕРСА.....	49
Е.И. Капцов, В.А. Дородницын, А.Ф. Шевяков ИНВАРИАНТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ, ОБЛАДАЮЩИЕ ЗАКОНАМИ СОХРАНЕНИЯ.....	50
И.Ю. Колесников СПЕКТРАЛЬНЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ НА ОСНОВЕ ОПЕРАТОРОВ ЛАПЛАСА И ГЕЛЬМГОЛЬЦА.....	51
А.В. Коптев НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА КУЭТТА.....	52
А.А. Костоглотов, И.В. Дерябкин, О.Н. Манаенкова ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ЧИСЛЕННЫХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ.....	54
М.М. Краснов ПРИМЕНЕНИЕ МЕТАПРОГРАММИРОВАНИЯ ШАБЛОНОВ ЯЗЫКА C++ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ.....	55

М.А. Кривов МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ В АТМОСФЕРЕ ЗЕМЛИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАФИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЕЙ.....	58
М.А. Кривов, Ф.И. Атауллаханов, П.С. Иванов ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОЛИМЕРНЫХ МИКРОТРУБОЧЕК С ПЛЕЧАМИ ХРОМОСОМЫ.....	59
Ю.А. Криксин, П.А. Кучугов, М.Е. Ладонкина, О.А. Неклюдова, В.Ф. Тишкин ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА НА РЕШЕНИЯХ СОДЕРЖАЩИХ РАЗРЫВ.....	60
А.Ю. Кутищева ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИН В ТРЕХМЕРНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ ОБРАЗЦАХ.....	61
М.А. Лапик, Д.Н. Туляков ЛОКАЛЬНЫЙ РЕЖИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ГАУССОВСКИХ УНИТАРНЫХ МАТРИЧНЫХ АНСАМБЛЕЙ.....	62
В.С. Лапонин, Н.П. Савенкова ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ВРЕМЕННЫХ СОЛИТОНОВ.....	63
В.Д. Левченко ЛОКАЛЬНО-РЕКУРСИВНЫЕ НЕЛОКАЛЬНО-АСИНХРОННЫЕ АЛГОРИТМЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ.....	64
А.Е. Луцкий, Я.В. Ханхасаева РАСЧЕТ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ НА ЛОКАЛЬНО АДАПТИВНЫХ СЕТКАХ.....	65
В.Г. Лысов АСИМПТОТИКА АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА–ПАДЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С ТРЕМЯ ТОЧКАМИ ВЕТВЛЕНИЯ.....	67
А.Г. Максимова, Г.Г. Лазарева, А.С. Аракчеев МОДЕЛИРОВАНИЕ НАГРЕВА ДЕФОРМИРОВАННОЙ ПЛАСТИНЫ ВОЛЬФРАМА ПРИ ИМПУЛЬСНОЙ ТЕПЛОВОЙ НАГРУЗКЕ.....	69
А.В. Мариненко, М.И. Эпов, В.В. Оленченко РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОТОМОГРАФИИ В	

	9
ГЕОФИЗИКЕ.....	70
С.И. Марков, Н.Б. Иткина ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА.....	71
И.С. Меньшов, П.В. Павлухин МЕТОД СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ АЭРОДИНАМИКИ НА ДЕКАРТОВЫХ ЛОКАЛЬНО-АДАПТИВНЫХ СЕТКАХ.....	72
Н.В. Мутовкин, Д.Н. Михайлов, И.Л. Софронов ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В СКВАЖИНЕ ПРИ НАЛИЧИИ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ШУМА В ПЛАСТЕ.....	73
А.Г. Обухов, Р.Е. Волков ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫХОДА НА СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ЛАБОРАТОРНОГО ТОРНАДО.....	74
А.Ф. Опрышко ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО СОГЛАСОВАННОГО РЕШЕНИЯ В.А.СУЧКОВА.....	75
В.В. Пененко ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ПРОДОЛЖЕНИЯ В МОДЕЛЯХ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ГИДРОТЕРМОДИНАМИКИ.....	75
А.Ю. Переварюха МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЗКИХ ПЕРЕХОДНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ ПРИ ИНВАЗИИ ЧУЖЕРОДНЫХ ВИДОВ НАСЕКОМЫХ.....	76
С.В. Пикулин О НЕЯВНОМ МЕТОДЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛМОГорова – ПЕТРОВСКОГО – ПИСКУНОВА.....	77
И.В. Пономарев, Г.В. Долголева ОПТИМИЗАЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ МИШЕНИ.....	78
И.Ф. Потапенко, С.А. Карпов КИНЕТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА В СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ (СТОХАСТИЧЕСКИЙ И ДЕТЕРМИНИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОДЫ).....	79

И.И. Потапов, К.С. Снигур РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ В УСЕЧЕННЫХ РАСЧЕТНЫХ ОБЛАСТЯХ.....	80
Е.А. Родина, С.П. Баутин ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО- КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ	81
В.Р. Руднев, Д.А. Тихонов, Л.И. Куликова, М.Ю. Губин БАЗА ДАННЫХ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СЕРВИСЫ ДЛЯ ХРАНЕНИЯ И ОБРАБОТКИ СУПЕРВТОРИЧНЫХ СТРУКТУР БЕЛКОВЫХ МОЛЕКУЛ	82
Ю.Г. Рыков МНОГОМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ. ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД.....	83
А.А. Сарин, Г.В. Долголева ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПРОЦЕССА ПЕРЕМЕШИВАНИЯ СЛОЕВ МИШЕНИ НА ЕЕ ГОРЕНИЕ.....	84
В.В. Сидоренко, С.С. Ефимов ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ПОЯСА КОЙПЕРА	85
С.В. Старченко ОПТИМИЗАЦИЯ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ ДЛЯ КРИТИЧЕСКОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ КОНВЕКЦИИ ПРИ БЫСТРОМ ВРАЩЕНИИ.....	86
С.В. Старченко, М.С. Котельникова МАСШТАБИРОВАНИЕ И ВОЗБУЖДЕНИЕ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ БЫСТРО СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ.....	87
С.В. Старченко, С.В. Яковлева ВАРИАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ НА ПРИМЕРЕ ГЕОМАГНИТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ГАУССА С 1590 г.....	88
Е.В. Степин О НЕКОТОРЫХ ТИПАХ МГД-ТЕЧЕНИЙ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ.....	90
А.М. Филимонова, В.Н. Говорухин СПЕКТРАЛЬНО-БЕССЕТОЧНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЛОСКОЙ ВИХРЕВОЙ ДИНАМИКИ НЕВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ...	91

Е.А. Цветова

ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГЕТЕРОГЕННЫХ СИСТЕМ..... 92

В.Г. Цибулин, М.А. Абделхафиз

ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА, СОХРАНЯЮЩАЯ КОСИММЕТРИЮ ЗАДАЧИ АНИЗОТРОПНОЙ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ ЖИДКОСТИ С НАНОЧАСТИЦАМИ..... 93

А.Ю. Чеботарев

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ РАДИАЦИОННОГО ТЕПЛООБМЕНА..... 94

Ю.Д. Шевелев, Ф.А. Максимов

ТЕЧЕНИЯ С КОНТАКТНЫМ РАЗРЫВОМ ОКОЛО ВРАЩАЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ..... 95

Д.В. Шевченко, А.И. Шангараева

ОПЫТ ПРИМЕНЕНИЯ АЛГОРИТМА УСКОРЕНИЯ РАСЧЕТОВ НАСЫЩЕННОСТИ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ..... 96

В.М. Шмаков

ПРИБЛИЖЕНИЕ ВПЕРЕД-НАЗАД УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ..... 97

Э.П. Шурина, Д.В. Добролюбова, Е.И. Штанько

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕКТОРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ОБЛАСТЯХ С МИКРОВКЛЮЧЕНИЯМИ НА ПОЛИЭДРАЛЬНЫХ НОСИТЕЛЯХ..... 98

Э.П. Шурина

ПРИМЕНЕНИЕ СОВРЕМЕННЫХ НЕКОНФОРМНЫХ МНОГОМАСШТАБНЫХ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ МНОГОФИЗИЧНЫХ ЗАДАЧ..... 99

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОСХОДЯЩИХ ЗАКРУЧЕННЫХ ПОТОКОВ, ИМЕЮЩИХ МЕСТО В ТРОПИЧЕСКИХ ЦИКЛОНАХ

Ю.А. Агеева¹, С.П. Баутин^{1,2}

¹ *Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург,
sqwerzy@mail.ru*

² *Снежинский физико-технический институт НИЯУ МИФИ, Снежинск,
sbautin@usurt.ru*

Тропический циклон — тип циклона, или погодной системы низкого давления, что возникает над теплой водяной поверхностью и сопровождается мощными грозами, выпадением ливневых осадков и ветрами штормовой силы. Традиционно считается, что тропические циклоны получают энергию от поднятия влажного воздуха вверх, конденсации водяных паров в виде дождей и опускания более сухого воздуха вниз.

В книгах [1,2] предложена другая схема возникновения и функционирования тропических циклонов. Неравномерный локальный нагрев подстилающей поверхности приводит к появлению неоднородностей температуры, плотности и давления. При действии сил тяжести и Кориолиса это является причиной возникновения сложного нестационарного закрученного движения среды.

Для решения задачи о моделировании трехмерных нестационарных течений, имеющих место в тропических циклонах, предлагается строить решение полной системы дифференциальных уравнений Навье-Стокса, при действии сил тяжести и Кориолиса. Для численного моделирования таких течений используется метод конечных разностей с использованием явной разностной схемы.

Список литературы:

1. *Баутин С.П.* Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск: Наука, 2008.
2. *Баутин С.П., Дерябин С.Л., Крутова И.Ю., Обухов А.Г.* Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг своей оси. Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2017.

ГЕНЕРАЦИЯ ТРЕХМЕРНЫХ СИНТЕТИЧЕСКИХ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОЛЕЙ НА ОСНОВЕ РАНДОМИЗИРОВАННОГО СПЕКТРАЛЬНОГО МЕТОДА

А.В. Александров¹, Л.В. Дородницын², А.П. Дубень¹

¹*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
alexandrov@itamod.ru*

²*МГУ имени М.В. Ломоносова, dorodn@cs.msu.su*

В современном моделировании турбулентных течений широко применяется гибридная методика RANS/LES: основная область течения описывается осредненными уравнениями Навье–Стокса (RANS), тогда как наиболее интересные подобласти — методом крупных вихрей (LES). На границе LES-зоны необходимо задать нестационарный по природе турбулентный поток, который нельзя напрямую получить из зоны RANS.

Среди ряда способов постановки нестационарных входных данных для LES-расчета наиболее перспективным представляется использование синтетических турбулентных полей. Авторы, следуя принципам, начатым в [1], развивают полностью стохастический метод генерации турбулентных полей, апробированный в [2] на двумерном случае.

1. Вычисляется среднее течение и осредненные характеристики турбулентности на основе модели RANS.

2. По полученным статистическим данным строится случайное поле скорости.

3. Рассчитывается эволюция во времени турбулентных вихрей и течения в целом с помощью методики LES.

Пульсационное поле скоростей реализуется в виде суммы гармоник, имеющих в случае однородной изотропной турбулентности вид

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \sum_{n=1}^N \mathbf{u}_n(\mathbf{x}), \quad \mathbf{u}_n(\mathbf{x}) = \mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega}^n) \left[\xi^n \sin(k_n(\boldsymbol{\omega}^n \cdot \mathbf{x})) + \boldsymbol{\eta}^n \cos(k_n(\boldsymbol{\omega}^n \cdot \mathbf{x})) \right],$$

где $k_n, \boldsymbol{\omega}^n, \xi^n, \boldsymbol{\eta}^n$ – случайные числа и векторы. Матрица $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\omega})$ размерности 3×3 с элементами $q_{jl} = \delta_{jl} - \omega_j \omega_l$, где $\boldsymbol{\omega}$ – точка на единичной сфере, обеспечивает бездивергентность поля скорости. Набор волновых чисел $k = k_n$ генерируется в соответствии с заданным энергетическим спектром $E(k)$.

Работа поддержана грантом РФФИ № 18-01-00726.

Список литературы:

1. R. Kraichnan. Diffusion by a random velocity field // Phys. of fluids, 1970, Vol.13, No.1, pp. 22–31.
2. Боровская И.А., Козубская Т.К., Курбанмурадов О., Сабельфельд К.К. О моделировании однородных случайных полей и сигналов и их

использовании в задачах аэроакустики // Матем. моделирование, 2007, т.19, № 10, с. 76–88.

К ОЦЕНКЕ НОРМЫ ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ НА АНСАМБЛЕ НЕЗАВИСИМЫХ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ

А.К. Алексеев¹, А.Е.Бондарев²

¹ РКК Энергия, г. Королев, МФТИ, г. Долгопрудный, Моск. обл., Россия,
aleksey.k.alekseev@gmail.com

²Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, *bond@keldysh.ru*

Ансамбль независимых численных решений, например, полученных алгоритмами, имеющими разные порядки аппроксимации, предоставляет некоторые нестандартные возможности для оценки погрешности расчета. Эти возможности рассмотрены в данном докладе и в работах [1,2,3]. Расстояние между истинным и численным решениями рассматривается как мера погрешности и оценивается в некоторой метрике.

Показано, что анализ набора расстояний между численными решениями позволяет оценить верхнюю границу погрешности для решений, упорядоченных по точности. Основой применимости данного подхода может служить неравенство треугольника [2]. Для случая отсутствия априорной информации об упорядочении решений по погрешности сформулирован и проверен полуэвристический критерий, обеспечивающий успех оценки погрешности (захват истинного решения в некоторую гиперсферу, описанную вокруг приближенного). В качестве альтернативного подхода рассмотрено использование эффекта концентрации меры в пространствах большой размерности [4].

Результаты численных экспериментов, проведенных для стационарных сверхзвуковых потоков, описываемых двумерными уравнениями Эйлера, сравнены с аналитическими решениями. Расчеты демонстрируют достаточно точную и устойчивую оценку нормы погрешности аппроксимации.

Проведено сравнение различных метрик, порожденных нормами L_1 , L_2 , H^{-1} и нормой [5], обеспечивающей наилучшие результаты.

Работа поддержана грантами РФФИ № 16-01-00553А и № 17-01-444А.

Список литературы:

1. *Alekseev A.K., Bondarev A.E., Navon I. M. On Estimation of Discretization Error Norm via Ensemble of Approximate Solutions//arXiv:1704.04994. 2017.*
2. *Alekseev A.K., Bondarev A.E., Navon I. M. On Triangle Inequality Based Approximation Error Estimation//arXiv:1708.04604. 2017.*

3. *Alexeev A.K., Bondarev A.E.* On Some Features of Richardson Extrapolation for Compressible Inviscid Flows//*Mathematica Montisnigri*. 2017. V. 38. P. 63-77.
4. *Зорич В.А.* Многомерная геометрия, функции очень многих переменных и вероятность//*ТВП*. 2014. Т. 59. №:3. С. 436-451.
5. *Wang L., Zhang Y., Feng J.* On the Euclidean Distance of Images//*IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*. 2005. V. 27. № 8. P. 1334 – 1339.

FPGA-УСКОРИТЕЛИ В ЗАДАЧАХ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ И ОБРАБОТКИ ИЗОБРАЖЕНИЙ

С.С. Андреев, С.А. Дбар, **А.О. Лацис**, Е.А. Плоткина

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Суперкомпьютеры на базе FPGA в принципе позволяют решить многие актуальные проблемы, стоящие сегодня перед отраслью высокопроизводительных вычислений. Однако, на практике их применение в качестве вычислительных систем общего назначения сталкивается с целым рядом трудностей. В работе делается попытка систематизировать эти трудности, и предложить пути их решения. Особое внимание уделяется обоснованному выбору классов задач, для решения которых такие суперкомпьютеры особенно эффективны.

Производительность единичного процессорного ядра универсального процессора на вычислительных задачах практически не растет уже почти 15 лет. Этот факт оставляет для традиционных многопроцессорных суперкомпьютеров единственный путь роста производительности - наращивание числа процессорных ядер в системе. Развитие по этому пути имеет несколько серьезнейших фундаментальных ограничений, важнейшее (но не единственное) из которых - рост потребления энергии. Все это заставляет разработчиков перспективных суперкомпьютеров все больше задумываться не просто об их эволюционном совершенствовании в рамках старых подходов, а о смене архитектуры.

Первой успешной попыткой создания новой архитектуры было появление гибридно-параллельных систем на базе GPGPU. Опыт последних лет показал как несомненные успехи на этом пути, так и то, что об окончательном решении проблемы говорить пока рано. Нужны еще гораздо более эффективные архитектуры. Наиболее радикальным подходом к архитектурному совершенствованию вычислителя является прямая схемная реализация алгоритма, что технически легко реализуемо при использовании FPGA. О громадном потенциале FPGA-ускорителей говорят уже много лет, но серьезных применений таких машин для сколько-нибудь широкого круга задач нет до сих пор. В этой работе мы постараемся проанализировать проблему, а главное -

показать, для каких задач и при каких условиях такие машины можно (и нужно) строить уже сегодня.

Список литературы:

1. *Андреев С.С., Дбар С.А., Лацис А.О., Плоткина Е.А.* Как и почему могут быть использованы на практике суперкомпьютеры на базе FPGA. М. РАН. 2017. ISBN 978-5-906906-61-8.

СТРАНИЦЫ БИОГРАФИИ К.И.БАБЕНКО. К 100-ЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

Н.Г. Афендикова

*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
keldysh111@gmail.com*

В следующем году будет отмечаться 100-летие со дня рождения Константина Ивановича Бабенко – выдающегося математика, замечательного механика и вычислителя самого высшего уровня.

Насыщенная научная деятельность К.И. Бабенко описана в статьях, посвященных его юбилеям [1, 5], в некрологе [2], в обзорных статьях о его работах [3, 4].

И в каждой из них как драгоценности встречаются упоминания о фактах его биографии, поразительной трудоспособности, упорству, широкой эрудиции, беззаветной преданности науке. Собрать эти факты в одном рассказе, дополнить сведениями из личного дела ученого [6], воспоминаниями его друзей, например, [7] и родных составляет цель предлагаемого доклада. Предполагается отразить также весь диапазон достижений К.И. Бабенко в науке.

Список литературы:

1. *Волевич Л.Р. и др.* Математическая жизнь в СССР и за рубежом. Константин Иванович Бабенко // УМН. 1980. Т.35. Вып.2(212).
2. Константин Иванович Бабенко. Некролог // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51. Вып.5.
3. *Волевич Л.Р.* О работах К.И.Бабенко по теории уравнений в частных производных // Сб. Конструирование алгоритмов и решение задач математической физики. ИПМ им. М.В.Келдыша. 1989.
4. *Тихомиров В.М.* Бабенко и теория приближений // Сб. Конструирование алгоритмов и решение задач математической физики. ИПМ им. М.В.Келдыша. 1989.
5. *Афендигов А.Л. и др.* Выдающийся математик нашего времени. К 80-летию со дня рождения К.И.Бабенко // Вестник Российской академии наук. 1999. Т. 69. № 12.
6. Архив ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. Ф. 1939, Оп. 4, Д. 1394.

7. Тихомиров В.М. Константин Иванович Бабенко // 7 искусств. 2011. № 12.

ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС «FLUX» ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННО-НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ АЭРОГИДРОДИНАМИКИ. АЛГОРИТМЫ, ПРИМЕРЫ РЕАЛИЗАЦИИ

А.В. Бабаков

*Институт автоматизации проектирования РАН (ИАП РАН),
avbabakov@mail.ru*

Рассматриваются разностные схемы, основанные на консервативном численном методе потоков [1], ориентированные на исследование пространственно-нестационарных течений сжимаемого газа в широком диапазоне скоростей. Используемые численные методики основаны на моделях вязкого и невязкого газа (модели Навье-Стокса и Эйлера). Параллельные алгоритмы метода реализованы на вычислительных системах кластерной архитектуры. Приводятся примеры реализации комплекса для численного исследования аэродинамики спускаемых аппаратов, включая ближний след с нестационарными вихревыми структурами, задач, связанных с мягкой посадкой возвращаемых аппаратов, нестационарных струйных течений, отрывных явлений в сопловых конструкциях сложной формы, трансзвуковых течений, гиперзвуковых потоков с использованием моделей равновесных и неравновесных химических реакций, течений около группы объектов.

Расчеты проводились на вычислительных ресурсах Межведомственного Суперкомпьютерного центра РАН (МСЦ РАН).

Список литературы:

1. Белоцерковский О.М., Северинов Л.И. Консервативный метод потоков и расчет обтекания тела конечных размеров вязким теплопроводным газом // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1973. Т.13. №2. С.385-397.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СПУТНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ПОТОКОВ В ТРУБЕ

Т.Ю. Балабина, Ю.Н. Дерюгин, Е.А. Кудряшов

*ФГУП «Российский федеральный ядерный центр – Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики»,
oefimova@otd13.vniief.ru*

Работа посвящена численному исследованию смешения двух спутных соосных потоков внутри цилиндрической трубы. Особое внимание уделяется исследованию сохранения однородности центрального рабочего потока, который экранируется инертным газом. В работе также представлены

результаты детального изучения структуры потоков. Показаны особенности развития турбулентных круглых струй, реализованных при одном и том же числе Рейнольдса.

Подобного рода исследованию посвящено значительное количество работ, однако большинство из них проводилось для безграничного пространства. Для ряда устройств особую ценность представляет исследование формирования потока в ограниченном пространстве.

Численное моделирование проводилось в рамках инженерного комплекса «ЛОГОС» [1]. При моделировании турбулентных течений использовалась вихреразрешающая RANS модель, для расчета конвективных потоков использовалась схема с гибридной диссипацией [2, 3].

Расчеты показали, что численное моделирование стационарного режима не дает полную картину течения. При исследовании нестационарного режима наблюдается срыв пограничного слоя, который влияет на формирование структуры рабочего потока.

Список литературы:

1. Козелков А.С., Дерюгин Ю.Н., Зеленский Д.К., Полищук С.Н., Лашкин С.В., Жучков Р.Н., Глазунов В.А., Яцевич С.В., Курулин В.В. Многофункциональный пакет программ ЛОГОС: физико-математические модели расчета задач аэро-, гидродинамики и тепломассопереноса. Препринт №111.Саров: РФЯЦ-ВНИИЭФ, 2013, 67 с.
2. Garbaruk A., Shur M., Spalart P.R., Streletc M. Jet noise computation based on enhanced DES formulations accelerating RANS-TO-LES transition in free shear layers/Proceedings of the Third Internations Workshop “Computation Experiment in Aeroacoustics” Sept. 24-27, 2014, Svetlogorsk, Russia, P. 123-127.
3. Уткина А.А., Жучков Р.Н., Емельянова Я.В. Применение схемы с гибридной диссипацией в решении задач вычислительной аэроакустики. Сборник тезисов V открытой всероссийской (XVII научно-технической) конференции по аэроакустики. Звенигород, 2017 – с. 242-243.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОТКРЫТЫХ ПУЧКОВО-ПЛАЗМЕННЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ЧАСТИЦ В ЯЧЕЙКАХ

Е.А.Берендеев¹, А.А. Ефимова¹, Г.И. Дудникова²

¹ИВМиМГ СО РАН, evgeny.berendeev@gmail.com, anna.an.efimova@gmail.com

²ИВТ СО РАН, gdudnikova@gmail.com

Одной из важных проблем моделирования пучково-плазменного взаимодействия является реализация алгоритма инъекции пучка в плазму. В постановке с периодическими граничными условиями, обычно, считается, что

пучок уже находится в плазме и непосредственно инжекция пучка не описывается. Однако в такой постановке пучок довольно быстро теряет энергию, что ограничивает применимость модели.

Данная работа посвящена построению открытых граничных условий, когда пучок инжектируется через границу области, заполненной плазмой. Задача рассматривается в следующей постановке. В области, имеющей форму прямоугольника, находится плазма, удерживаемая продольным магнитным полем. Динамика плазмы описывается системой уравнений Власова-Максвелла, которые решаются с использованием метода частиц в ячейках. Через границы области $X=0$, $X=L_x$ могут инжектироваться пучки с заданными параметрами (плотностью, скоростью). Плазма также может свободно проникать через эти границы, однако, требуется обеспечить как непрерывность функции распределения частиц на границах, так и естественный противоток, который возникает при инжекции пучка. В работе рассматривается несколько граничных условий на частицы и электромагнитные поля на границах $X=0$, $X=L_x$ (предполагается, что плазма не достигает границ $Y=0$, $Y=L_y$), проводится сравнение с моделью с периодическими граничными условиями.

На основе созданной модели проведено численное моделирование генерации электромагнитного излучения при пучково-плазменном взаимодействии в условиях непрерывной инжекции пучка. Рассмотрены различные конфигурации системы: в плазму инжектируется один пучок; два встречных пучка, ширина которых равна ширине плазмы; два встречных пучка разной ширины.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 16-11-10028.

О РАЗНОСТНЫХ СХЕМАХ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КДВ

Ю.А. Блинков¹, В.П. Гердт²

¹*Саратовский государственный университет, BlinkovUA@info.sgu.ru,*

²*Объединенный Институт Ядерных Исследований, gerdt@jinr.ru*

В работе представлен разработанный авторами подход, основанный на методах компьютерной алгебры, к построению, на равномерной и ортогональной сетке, разностных схем для дифференциальных уравнений.

Рассмотрено применение этого подхода к решению класса одномерных квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных эволюционного типа с полиномиальной нелинейностью. Этот класс включает в себя следующие хорошо известные и хорошо изученные уравнения: уравнение Кортевега-де Фриза (КдФ), уравнение Бюргерса и много других эволюционных уравнений, имеющих точные решения [1].

Показано, что комбинация метода конечных объёмов с численным интегрированием и с алгебраическим разностным исключением,

обеспечиваемым построением базисов Грёбнера, позволяет сгенерировать конечно - разностную аппроксимацию (как разностную схему) для изучаемого дифференциального уравнения на равномерной прямоугольной сетке [2].

Для уравнения КдФ построена сильно согласованная конечно - разностная аппроксимация четвертого порядка точности по пространственному шагу сетки и второго по временному. Эта аппроксимация, рассматриваемая как разностная схема, будучи неявной, является абсолютно устойчивой, а поэтому сходящейся. При этом уравнение КдФ было записано в интегральной форме. Для аппроксимации контурного интеграла был применен метод трапеций в случае интегрирования по времени и метод средних прямоугольников для интегрирования по пространственной переменной. Выявлено хорошее поведение численного решения полученной схемы на двухсолитонных решениях по сравнению с другими схемами четвертого порядка [3]. Для сравнения разностных схем были выведены их первые дифференциальные приближения и проведено их сравнение.

Работа поддержана грантом РФФИ № 01-16-00080.

Список литературы:

1. *Кудряшов Н.А.* Методы нелинейной математической физики. 2-е доп. издание. – Долгопрудный: Интеллект (2010).
2. *Блинков Ю.А., Гердт В.П., Маринов К.Б.* Дискретизация квазилинейных эволюционных уравнений методами компьютерной алгебры // Программирование. 2017. № 2. С. 28-34.
3. *Belashov V.Yu., Vladimirov S .V.* Solitary Waves in Dispersive Complex Media: Theory, Simulation, Applications. Berlin: Springer-Verlag, 2005. 292 p.

ЧИСЛЕННОЕ СРАВНЕНИЕ СИЛЬНО СОГЛАСОВАННЫХ СХЕМ

Ю.А. Блинков¹, В.П. Гердт², И.А. Панкратов¹

¹*Саратовский государственный университет, BlinkovUA@info.sgu.ru,
PankratovIA@info.sgu.ru,*

²*Объединенный Институт Ядерных Исследований, gerdt@jinr.ru*

В работе описан подход, основанный на символьном анализе генерации соответствующих конечно – разностных аппроксимаций для систем полиномиально – нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных на регулярных декартовых сетках. Сгенерированные аппроксимации являются сильно согласованными, что подразумевает сохранение фундаментальных дифференциально - алгебраических свойств системы на дискретном уровне.

В работе приведены алгоритмические методы генерации конечно-разностных аппроксимаций уравнений в частных производных на

ортогональных и однородных сетках и проверки сильной согласованности полученных аппроксимаций. Для построения конечно-разностных схем и анализа их согласованности был использован метод базисов Грёбнера [1, 2].

Указанный подход был применен к анализу конечно-разностных аппроксимаций двумерных нестационарных уравнений Навье-Стокса, описывающих течение несжимаемой жидкости с постоянным коэффициентом вязкости. Уравнения Навье-Стокса (дополненные уравнением неразрывности и уравнением Пуассона для давления) были записаны в форме дифференциальных законов сохранения. Проведено численное моделирование вихревой дорожки Кармана. Показано, что сильно согласованная схема имеет очевидное преимущество перед схемой, которая не является сильно согласованной. Устойчивость схемы повышается при увеличении количества точек в конечно-разностной аппроксимации.

Работа поддержана грантом РФФИ № 16-01-00080.

Список литературы:

1. *Cox D., Little J., O'Shie D.* Ideals, Varieties and Algorithms. An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra. – New York: Springer (2007).
2. *Gerdt V.P., Blinkov, Yu.A.* Involution and Difference Schemes for the Navier-Stokes Equations. Computer Algebra in Scientific Computing // CASC 2009, Gerdt, V.P., Mayr, E.W., and Vorozhtsov, E.V. (Eds.), LNCS 5743, 94-105. Springer, Berlin (2009).

РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ ПОД СИСТЕМОЙ ПЛОТИН И ТЭТА ФУНКЦИИ РИМАНА

А.Б. Богатырёв

*Институт вычислительной математики Российской академии наук, г. Москва
ab.bogatyrev@gmail.com*

Рассматривается двумерная модель течения жидкости под плотиной (каскадом плотин) с сечением, ограниченным прямоугольной ломаной. Предложен новый численно-аналитический метод расчета фильтрации жидкости, основанный на вычислении интеграла Кристоффеля-Шварца с помощью тэта функций Римана. Обсуждаются вопросы дизайна и оптимизации расчетной области (совместно с Григорьевым О.А.).

Работа поддержана грантом РФФИ 16-11-10349.

Список литературы:

1. *Bogatyrev A., Grigor'ev O.* Water flow under rectangular dam // arXiv:1805.03542.

О РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИИ ПО ВРЕМЕНИ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ СХЕМ РЕШЕНИЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ ЗАДАЧ

М.А. Бочев^{1,2}, В.Ж. Geurts^{3,4}, G.L. Kooij³

¹*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва,*

²*Сколковский институт науки и технологий, Москва, botchev@ya.ru*

³*Multiscale Modeling and Simulation, University of Twente, Enschede,
the Netherlands*

⁴*Fluid Dynamics Laboratory, Eindhoven University of Technology,
Eindhoven, the Netherlands*

В докладе представлены параллельные по времени схемы решения эволюционных задач на основе экспоненциальных схем подпространства Крылова [1,2,3]. Такие схемы представляют интерес, если при решении больших задач с уравнениями в частных производных распараллеливание по пространству не приводит к ожидаемому снижению времени вычислений (закон Амдала, Рис. 1). В этом случае распараллеливание по времени вдобавок к распараллеливанию по пространству может существенно повысить параллельную эффективность вычислений.

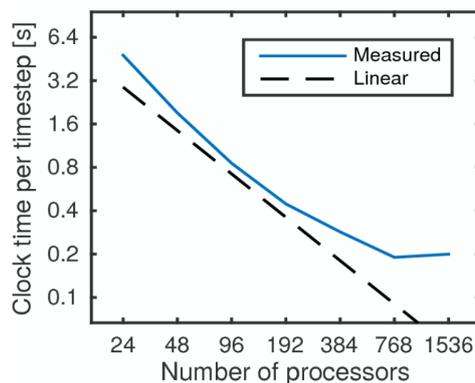


Рис. 1. Снижение параллельной эффективности (закон Амдала) пакета Nek5000 на суперкомпьютере Cartesius (Амстердам)

Работа первого автора выполнена за счет Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 27.

Список литературы:

1. Botchev M.A. A block Krylov subspace time-exact solution method for linear ordinary differential equation systems. Numer. Linear Algebra Appl. 20(4), 557–574 (2013).
2. Kooij G.L., Botchev M.A., Geurts B.J. A block Krylov subspace implementation of the time-parallel Paraexp method and its extension for nonlinear partial differential equations // J. Comput. Applied Math. 316(C), 229–246 (2017).

3. *Kooij G.L., Botchev M.A., Geurts B.J.* An exponential time integrator for the incompressible Navier–Stokes equation // *SIAM J. Sci. Comput.* (2018), to appear.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УДАРНО-ВОЛНОВОГО ПОДГОНА ПРИ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОМ МЕТАНИИ ТЕЛ

Н.В. Быков

МГТУ им. Н.Э. Баумана, bykov@bmstu.ru

Невысокая эффективность газового разгона, определяемая низкими значениями коэффициента полезного действия, обусловлена тем, что в результате быстрого расширения газа, разгон тела уже на небольших расстояниях от начального положения становится малоэффективным из-за сильного спада давления. Одним из способов повышения эффективности является создание дополнительной ударной волны, идущей от дна канала, которая бы догоняла разгоняемое тело и придавала ему дополнительное ускорение. Движение газа описывается системой уравнений сохранения массы, импульса и энергии и замыкается уравнением состояния. Приведенная система уравнений решается численно на подвижной сетке [1].

Для модельной установки с параметрами: калибром 0.03 м; начальной длиной области с газом 0.5 м; длиной пути разгона 1.5 м; начальном давлении 40 МПа; температуре 283 К без ударно-волнового подгона скорость модели массой 0.1 кг составляет 416 м/с. Общее баллистическое время 44 мс.

Для упрощения описания движения поршня моделируется с помощью импульсного скоростного сигнала. В момент времени t_0 поршень начинает движение с постоянной скоростью $U = 300$ м/с в течение времени Δt , таким образом проходит расстояние $l_p = U \Delta t$.

При иницировании ударно-волнового подгона в начальный момент ($t_0 = 0$) и продолжительностью перемещения поршня равной 1 мс, скорость модели составляет 706 м/с, т.о. прирост скорости 70% по сравнению с базовым вариантом.

При $t_0 = 1$ мс скорость модели составляет 615 м/с. При более позднем времени иницирования скорость модели еще больше снижается.

В установках, работающих на более легких газах (гелий, водород), позволяющих получать при одноступенчатом разгоне скорости порядка 1500 - 2000 м/с, ударно-волновой подгон позволяет добиться значительных преимуществ.

Работа поддержана грантом РФФИ № 16-29-09596 офи-м.

Список литературы:

1. *Быков Н.В., Нестеренко Е.А.* Математическое моделирование и визуализация внутрикамерных процессов в баллистических установках с

гидродинамическим эффектом // Научная визуализация. 2015. Т. 7. №1. С. 65-77.

ФИЛЬТРАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Д.А. Быковских, В.А. Галкин

БУ ВО ХМАО-Югры «Сургутский государственный университет»,
dmitriy.bykovskih@gmail.com, val-gal@yandex.ru

В работе рассматривается кинетическая модель движения идеального газа [1] в пористой среде. Пористая среда представляет собой сетку, в узлах которой расположены рассеивающие центры (рис. 1).

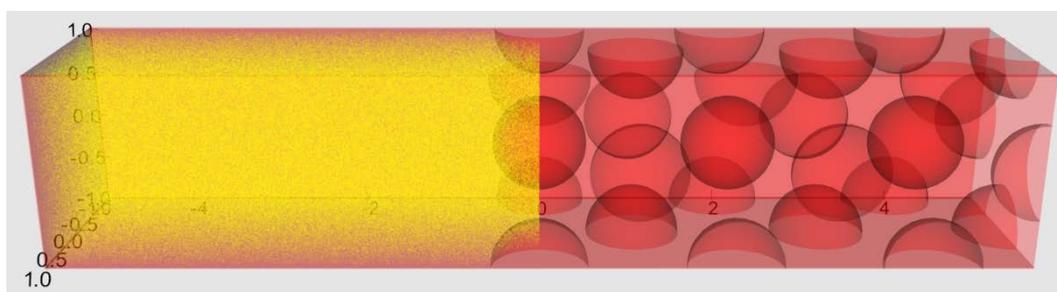


Рис. 1. Модель пористой среды

Математическая модель – система уравнений, состоящая из соотношения Клапейрона-Менделеева для идеального газа, уравнения неразрывности для сжимаемого газа и линейного закона Дарси при установившейся фильтрации (1).

$$P = \rho RT, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho u) = 0, \quad u = -\frac{k}{\mu} \nabla P, \quad (1)$$

где P - давление; ρ - плотность; R - универсальная газовая постоянная; T - температура; u - скорость течения газа; k - проницаемость среды; μ - динамическая вязкость.

В одномерном случае для идеального газа скорость фильтрации при установившемся течении для системы уравнений (1) имеет следующий вид:

$$u = -\frac{k}{v} \frac{P_L^2 - P_0^2}{2\langle \rho \rangle P_L L}, \quad (2)$$

где $v = \mu/\langle \rho \rangle$ - кинематическая вязкость; $\langle \rho \rangle$ - средняя плотность.

Численное моделирование основано на методе Монте-Карло. Движение частиц газа описывается уравнением Лиувилля, а их взаимодействие с границами основано на законе зеркального отражения. Интегральные характеристики (давление, температура, плотность и т.д.) рассчитываются на основе статистических оценок макроскопических параметров течения газа в элементарных объемах [1, 2].

Работа поддержана грантами РФФИ № 18-01-00343, № 18-47-860004.

Список литературы:

1. *Быковских Д.А., Галкин В.А.* О вычислительном тесте для одной модели бесстолкновительного идеального газа // Вестник кибернетики. 2017. №3(27), С.119–127.
2. *Черчиньяни К.* Математические методы в кинетической теории газов. — М.: Мир, 1973.

КОМБИНАТОРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ КАК УСКОРИТЕЛИ СХОДИМОСТИ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

В.П. Варин

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, varin@keldysh.ru

Ускорение сходимости степенных рядов, понимаемое в широком смысле, т.е. как ускорение сходимости сходящихся рядов как таковое, так и суммирование (вообще говоря) расходящихся рядов, является одним из классических направлений в асимптотическом анализе.

Последнее время интерес к этому направлению значительно возрос. Достаточно сказать, что ряды по малому параметру, получаемые по методу возмущений в квантовой механике, оказываются как правило расходящимися [1].

Существует около полутора десятков различных приемов и методов ускорения сходимости, однако немногие из них способны суммировать всюду расходящиеся ряды.

Мы покажем, что классические комбинаторные преобразования последовательностей, такие как преобразования Стирлинга, Ганкеля, биномиальное преобразование, напрямую связаны с преобразованиями расходящихся степенных рядов в некоторые сходящиеся (не степенные) ряды или сходящиеся цепные дроби.

В частности, нам удалось обнаружить новый эффект, аналогичный явлению Стокса, т.е. показать, что один и тот же расходящийся ряд может суммироваться в различные функции в различных секторах, примыкающих к особой точке [2]. Это, в свою очередь, является достаточным признаком расходимости ряда, полученным без какой-либо оценки роста его коэффициентов.

Список литературы:

1. *Bender C., Heissenberg C.* Convergent and Divergent Series in Physics // [arXiv:1703.05164v2] (2016). (<https://arxiv.org/abs/1703.05164v2>).
2. *Varin V. P.* Factorial transformation for some classical combinatorial sequences // KIAM Preprint. 2018. № 114. p. 31.

СВЯЗЬ МОДЕЛЕЙ И МЕТОДОВ В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД

Д.А. Варфоломеев, М.Н. Якимова

ФГУП «РФЯЦ-ВНИИТФ им. академ. Е.И. Забабахина»,
d.a.varfolomeev@mail.ru

Памяти профессора В.Ф. Куропатенко посвящается...

Основой Вычислительной МСС является математическая модель, которая состоит из модели МСС и разностного метода. Для достижения наилучшего результата и максимальной точности описания физического явления разностный метод должен вносить минимальное количество погрешностей в получаемое решение, а также учитывать особенности выбранной модели МСС. В докладе данный вопрос рассматривается на примере работ В.Ф. Куропатенко. Так, например, на ударных волнах необходимо корректно описывать диссипацию энергии. В.Ф. Куропатенко является автором одного из четырех известных механизмов описания диссипации энергии во фронте ударной волны [1]. На его основе построен ряд разностных схем, например [2]. Уникальным является его неоднородный разностный метод, позволяющий отслеживать движение сильных, слабых и контактных разрывов [3].

При использовании современных широкодиапазонных уравнений состояния с фазовыми переходами необходимо, чтобы разностный метод «умел» определять при переходе частицы от одного состояния в другое точку пересечения с кривой равновесия фаз. Для корректного описания дробления вещества необходимо применение методов с выделением разрывов [4]. При моделировании сферических и цилиндрических течений возникает трудность с разделением сжатия на ударное и изэнтропическое. Если численный метод считает любое сжатие ударным, то в ряде задач погрешность может достигать катастрофических значений [5].

Список литературы:

1. *Куропатенко В.Ф.* Метод расчета ударных волн // ДАН СССР. 1960. В.3. №4. С. 771-772.
2. *Kuropatenko V.F., Yakimova M.N.* Method for Shock Calculation // Computational Mathematic. 2015. Vol. 1. No 2. P. 64-70.
3. *Куропатенко В.Ф.* Приближенный метод расчета величин за фронтом ударной волны //Числ. методы механики сплошной среды. 1970. Т.1. №6. С. 77-83.
4. *Д.А. Варфоломеев, В.Ф. Куропатенко.* О методах расчёта отколов // XI Забабахинские научные чтения, Снежинск, 2012.
5. *В.Ф. Куропатенко, Ю.Н. Андреев.* О моделировании динамических процессов в сферических и цилиндрических оболочках // Вычислительная механика сплошных сред. 2010. Т.3. № 4.

МЕТОДИКА РАСЧЕТА ФОРМИРОВАНИЯ КРИОГЕННОГО СЛОЯ D-T СМЕСИ В СФЕРИЧЕСКОМ КОНТЕЙНЕРЕ

Е.А. Веселова, Ю.Н. Дерюгин, В.М. Изгородин, Е.Ю. Соломатина

*ВНИИЭФ (Всероссийский Научно Исследовательский Институт
Экспериментальной Физики) г.Саров*

Для разработки технологии получения криогенных мишеней для ЛТС и их сохранения требуется знание влияния температуры окружающих деталей камеры и остаточного газа на температурный режим самой мишени, толщину криогенного слоя и его распределения по внутренней поверхности микросферы.

В работе [1] была создана одномерная расчетная модель процесса симметричного замораживания газонаполненной микросферы. Данная модель представляет собой задачу Стефана с двумя фазовыми переходами с учетом потенциального движения замораживаемого газа. С использованием созданной методики вычислены пространственно-временные распределения температуры внутри и вне сферы, скорость движения газа внутри сферы и время замораживания в широких пределах размеров микросфер, количества содержащегося в них газа и скорости охлаждения.

При замораживании газонаполненной микросферы, которая подвешивается на нити в контейнере, в результате влияния силы тяжести происходит не симметричное охлаждение мишени. В работах [2,3] отмечается, что в следствии энерговыделения при распаде трития в D-T смеси происходит симметризация твердой фазы D-T смеси в мишени.

Целью данной работы является разработка экономичной методики расчета формирования криогенного слоя D-T смеси в микросфере на основе двумерного подхода и уравнений движения газовой фазы в приближении Буссинеска. Тепловая задача представляет собой задачу Стефана с фазовым переходом газ-твердое тело с выделением фронта фазового перехода на подвижной эйлеровой сетке. Расчетная методика построена на структурированных подвижных сетках. Расчетный шаг расщепляется на два этапа. На первом этапе решаются уравнения движения газовой фазы, которые аппроксимируются неявной разностной схемой. На втором этапе решается внутренняя задача Стефана. Здесь используется алгоритм с выпрямлением фазового фронта. Уравнение теплопереноса аппроксимируется неявной разностной схемой, которая записывается в дельта- форме, относительно приращения температуры. Системы разностных уравнений расщепляются по направлениям на одномерные системы, которые решаются методом прогонки. Методика реализована в рамках пакета программ ЛОГОС [4]. Приводятся результаты расчетов формирования криогенного слоя для различных значений температур, размеров и материалов оболочки.

Список литературы:

1. *Deryugin Yu. N., Izgorodin V.M., Solomatina E. Yu.* Numerical simulation of the freezing process of hydrogen isotopes in a spherical container // *J. Moscow Phys. Soc.* 9 (1999) 165-172.
2. Investigation of the effect of a plastic ring on the uniformity of ice layers in cryogenic inertial confinement fusion targets LLE // *Review Vol. 81*, p.14 (2002).
3. Modeling the Temperature and Ice-Thickness Profiles Within OMEGA Cryogenic Targets // *LLE Review, Volume 8*.
4. *Козелков А.С., Дерюгин Ю.Н., Зеленский Д.К., Глазунов В.А., Голубев А.А., Денисова О.В., Лашкин С.В., Жучков Р.Н., Тарасова Н.В., Сизова М.А.* Многофункциональный пакет программ ЛОГОС для расчета задач гидродинамики и тепломассопереноса на многопроцессорных ЭВМ: базовые технологии и алгоритмы. // *Супервычисления и математическое моделирование: Труды XII международного семинара. Саров, 11-15 октября 2010. С. 215-230.*

**ПАКЕТ ПРОГРАММ ЛОГОС.
МЕТОДИКА РАСЧЕТА ДВУМЕРНЫХ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С
УЧЕТОМ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ НА ПОДВИЖНЫХ
НЕСТРУКТУРИРОВАННЫХ СЕТКАХ**

Е.А. Веселова, **Ю.Н. Дерюгин**, Д.К. Зеленский

*ВНИИЭФ (Всероссийский Научно Исследовательский Институт
Экспериментальной Физики) г.Саров*

В ряде практических приложениях необходимо достаточно точно моделировать распространение ударной волны в различных средах. Использование здесь методов сквозного счета приводит к существенной погрешности в определении скорости и положения ударной волны. Для решения такого класса задач в [1] развиты методы на структурированных подвижных эйлеровых сетках с выделением основных особенностей решения. Основная трудность в проведении расчетов по этим методам состоит в поддержании качественной сетки, особенно в центральной части, где в следствии вырождения ячеек на оси симметрии, происходит сильное ограничение счетного шага.

В данной работе проводится разработка методики расчета двумерных задач газовой динамики с теплопроводностью на подвижных неструктурированных сетках. Математическая модель, используемая для описания процессов распространения ударных волн, основана на уравнениях многокомпонентной газовой динамики и уравнении переноса излучения в диффузионном приближении. Расчетная методика построена на основе использования неструктурированных подвижных сеток, методе расщепления по

физическим процессам, явного метода интегрирования уравнений Эйлера и неявного метода решения уравнения теплопереноса. Расчетный шаг расщепляется на три этапа. На первом этапе определяется новое положение сетки. Движение сетки связывается с движением выделенных разрывов, таких как ударная волна, контактные разрывы, фронт пламени. Граничные условия на выделенных разрывах разрешаются методом распада разрыва, из решения которого определяется скорость смещения граней. По изменению положения выделенных разрывов производится перестройка сетки. На втором этапе интегрируются уравнения Эйлера на подвижной сетке. Разностные уравнения получены дискретизацией исходных уравнений в интегральной форме квадратурными формулами прямоугольников. Численно конвективные потоки определяются на основе решения задачи о распаде разрыва. Для повышения точности моделирования предраспадные параметры потока определяются с использованием линейной реконструкции решения. В задачах со сферической симметрией с целью уменьшения немоноктонности численного решения применяется алгоритм доворота вектора скорости у предраспадных параметров потока [2]. На третьем заключительном этапе решаются уравнения теплопроводности, на неподвижной неструктурированной сетке. Расчетные формулы получены путем интегрирования уравнений теплопроводности по контрольному объему ячейки. Тепловые потоки на гранях аппроксимируются по верхнему временному слою центральными разностями. Разностные уравнения решаются итерациями по нелинейности и методе отложенной коррекции учитывающей не ортогональность сетки. Получающаяся в результате аппроксимации система линейных алгебраических уравнений решается с использованием параллельных решателей из библиотеки PMLP [3]. Методики реализованы в рамках параллельного пакета программ ЛОГОС [4]. Приводятся результаты расчета тестовых и модельных задач, характеризующие возможности методики.

Список литературы:

1. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. - М.: Наука, 1976-400 с.
2. Матяш С.В. Новый метод использования принципа минимальных приращений в численных схемах второго порядка аппроксимации. // Ученые записки ЦАГИ. 2005. Т.36 №3-4. С.42-50.
3. Артемьев А. Ю., Бартенев Ю. Г., Басалов В.Г., Бондаренко Ю. А., Варгин А.М., Голубев А. А., Ерзунов В. А., Ломтев А.В., Максимов А. С., Панов А. И., Прокофьев А.И., Романова М. Д., Фролова Н. В., Щаникова Е. Б. Реализованные методы решения разреженных линейных систем в библиотеке линейной алгебры // ВАНТ, сер Математическое моделирование физических процессов – 2002 – вып. 2.
4. Дерюгин Ю.Н., Козелков А.С., Спиридонов В.Ф., Циберев К.В., Шагалиев Р.М. Многофункциональный высокопараллельный пакет программ

ЛОГОС для решения задач тепломассопереноса и прочности, Сборник тезисов докладов Санкт-Петербургского научного форума “Наука и общество”, стр. 102, 2012 год.

БЕГУЩИЕ ВОЛНЫ И УСКОРЕНИЕ ПЛАЗМЫ В КСПУ

М.Б. Гавриков, А.А. Таюрский

*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
mbgavrikov@yandex.ru, tayurskiy2001@mail.ru*

Плоские бегущие волны это течения сплошной среды, все параметры которых зависят в каждый момент времени только от одной пространственной координаты x и профиль каждого параметра с течением времени перемещается как единое целое вдоль оси x с постоянной общей фазовой скоростью a . Такие волны являются решениями уравнений динамики сплошной среды вида $f(\theta)$, $\theta = x - at$ – фаза волны. В плазменной сплошной среде, подчиняющейся уравнениям электромагнитной гидродинамики (ЭМГД), бегущие волны являются решениями системы относительно безразмерных функций $\mathbf{H}_\perp(\theta)$, $u(\theta) = U_\parallel(\theta) - a$

$$\left(\frac{|u|}{2} - \beta^2\right) \mathbf{H}_\perp - \xi^2 |u| \frac{d}{d\theta} \left(|u| \frac{d\mathbf{H}_\perp}{d\theta}\right) + \Lambda \xi \beta |u| \left[\mathbf{k}, \frac{d\mathbf{H}_\perp}{d\theta}\right] + \mathbf{p} = 0, \quad (1)$$

$$|u| + K / |u|^\gamma + H_\perp^2 = 2, \quad (2)$$

где \mathbf{k} – единичный вектор вдоль оси x , все векторные величины раскладываются вдоль (\parallel) и поперёк (\perp) вектора \mathbf{k} , $\xi > 0$, $K \geq 0$, β – числа подобия, $\mathbf{p} \perp \mathbf{k}$ – произвольный вектор, $\Lambda = (\lambda_+ / \lambda_-)^{1/2} - (\lambda_- / \lambda_+)^{1/2}$, $\lambda_\pm = m_\pm / e_\pm$, m_\pm , e_\pm – массы и абсолютные величины зарядов плазменных компонент. Параметр β пропорционален продольному магнитному полю, K – температуре плазмы, ξ^2 – обратно пропорционален погонному числу частиц плазмы. В частных случаях [1,2,3] известны точные решения системы, в случае $\mathbf{p} = 0$, $K > 0$. При этом электроны и ионы считаются идеальными политропными газами с общим показателем адиабаты $\gamma > 1$ и предполагается $u > 0$. Решение $w(\theta) = (H_y(\theta), H_z(\theta), u(\theta))$, $\mathbf{H}_\perp = (H_y, H_z)$ системы, лежит на сфероиде S^2 . Гладкие (класса C^2) бегущие волны разбиваются на три класса: холодные (кривая $w(\theta)$ лежит на северном полушарии $u \geq u_*$), горячие (кривая $w(\theta)$ лежит на южном полушарии $u \leq u_*$) и гибридные (кривая $w(\theta)$ одновременно лежит и на северном, и на южном полушариях). Холодные и горячие волны исследуются по методике работы [3]. Установлено, что существуют 4 типа гибридных волн.

Исследование выполнено за счет гранта РНФ (проект №16-11-10278).

Список литературы:

1. *Adlam J.H., Allen J.E.* // *Phil. Mag.* 1958. Vol. 3 P. 448.
2. *Lüst R.* *Fortschritter der Physik.* // **7.** 503–558. (1959).
3. *Гавриков М.Б.* Аперiodические колебания холодной плазмы // Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша. 1991. №33. 28 с.

ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ФИЗИЧЕСКОЙ КИНЕТИКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ

В.А. Галкин

*Сургутский государственный университет, политехнический институт
val-gal@yandex.ru*

Математические модели физических систем, состоящих из статистически большого количества частиц (разреженные газы, дисперсные системы, системы с поверхностями фазовых переходов), а также модели механики сплошной среды основываются на фундаментальных соотношениях баланса, носящих общее название законы сохранения. Значительное количество современных исследований по теории законов сохранения связано с вопросами корректности задач для нелинейных систем дифференциальных и интегродифференциальных уравнений [1]

$$\partial_t u^{(\omega)}(x, t) + \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} f_j^{(\omega)}(u, x, t) = S^{(\omega)}(u, x, t), \quad (1)$$

$$x \in \mathbb{R}_n, \quad t > 0, \quad \omega \in \Omega, \quad u|_{t=0} = u_0,$$

где $u = \{u^{(\omega)}\}$ является неизвестной вектор-функцией, вид потоков f_j и источник (оператор столкновений) S заданы характером моделируемого процесса, $x \in \mathbb{R}_n$ — пространственные координаты, t — время, Ω — параметры, нумерующие уравнения (множество Ω имеет произвольную структуру, например, это могут быть натуральные числа, вещественные числа и т.д.). Такие системы назовем системами законов сохранения. Их приложения широко известны, в частности, в связи с уравнениями газовой динамики и гидродинамики, уравнениями физической кинетики Больцмана и Смолуховского, теорией плазмы, моделями выращивания кристаллов и т.д. Наряду с корректностью в круге проблем для систем законов сохранения (1) традиционно особую роль играют такие вопросы нелинейной математической физики, как обоснование предельного перехода по малым параметрам приближенных методов, используемых при отыскании неизвестного решения. Наиболее полное построение глобальной теории корректности для скалярного закона сохранения ($\text{card}\Omega = 1$) выполнено С.Н. Кружковым [2]. До недавнего времени трудности, связанные с предельными переходами в нелинейных (квазилинейных и полулинейных) системах законов сохранения, для многих

методов казались непреодолимыми. Рассмотрен класс стационарных задач с источником частиц для уравнений физической кинетики с операторами столкновений бoльцмановского типа. Предложен алгоритм построения диссипативных решений, позволяющий отыскать точные решения нестационарного уравнения Смолуховского для пространственно однородных систем с мультипликативным ядром слияния частиц. Обоснован алгоритм построения таких решений. Важной спецификой выделенного класса решений является то, что на них оператор столкновений является разрывным в норме соотношения сохранения. Сформулирована проблема существования таких решений в случае оператора столкновений Больцмана кинетической теории газов, что позволило бы дополнить класс точных решений А.В. Бобылева диссипативными решениями. Доказательство существования неотрицательных решений $f^{(\omega)} \geq 0$ и их отыскание для уравнения

$$S(f) + q = 0 \quad (2)$$

в случае стационарного источника $q^{(\omega)} \geq 0$ является крайне важной и трудной задачей физической кинетики. Причина — в том, что эти решения сосредоточены на множестве точек разрыва оператора S . Для случая слияния частиц неотрицательная величина $q(\omega)$ определяет интенсивность, с которой частицы массы $\omega \geq 0$ вводятся в коагулирующую систему. Отметим, что решения f уравнения (2) автоматически должны удовлетворять требованию

$$S(f) = -q < 0,$$

если $q > 0$, где S — оператор столкновений Смолуховского кинетической теории коагуляции. Ясно, что такие решения не принадлежат множеству консервативности оператора столкновений, а лежат во множестве диссипативности в силу неотрицательности источника.

Такого рода задачи возникают при описании роста пор в металлах при облучении потоком быстрых нейтронов, которые, выбивая атомы из кристаллической решетки, служат причиной возникновения пор. При описании работы реактивных двигателей приходится учитывать коагуляцию слипающихся частичек, которые возникают в процессе горения топлива, т. е. здесь источником коагулирующих частиц является химическая реакция, протекающая во внешней среде. Важный класс задач связан с коагуляцией пор в поровом пространстве нефтегазовых пластов при пульсации давления в залежи.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты № 16-29-15105, 18-01-00343, 18-47-860004.

Список литературы:

1. Галкин В.А. Уравнение Смолуховского. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001, 336 с.
2. Кружков С.Н. Труды. Составители: Н.С.Бахвалов, В.А.Галкин, Ю.А.Дубинский - М.: Наука. Физматлит. - 2000.

МОДЕЛИРОВАНИЕ СЛОИСТОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

В.А. Галкин, А.О. Дубовик

БУ ВО Сургутский государственный университет,
val-gal@yandex.ru, alldubovik@gmail.com

Рассматриваются система уравнений МГД [1], описывающая течение вязкой магнитной несжимаемой жидкости в бесконечном цилиндре, бесконечном коаксиальном цилиндре. В качестве граничных условий для поля скоростей \mathbf{v} и вектора напряженности магнитного поля \mathbf{H} будут рассматриваться условия Дирихле. Для поля температур T – условие теплоизолированности стенок. Рассматривается слоистое течение жидкости.

$$\mathbf{v} \equiv \{0, v_\varphi(\rho, t), v_z(\rho, t)\}. \quad (1)$$

Вектор скорости (1) представлен в цилиндрической системе координат $\{\rho, \varphi, z\}$. Вектор напряженности магнитного поля предполагается параллельным оси цилиндра, коаксиального цилиндра Oz и так же как и поле давления p зависит только от радиальной переменной и времени t

$$\mathbf{H} \equiv \{0, 0, H_z(\rho, t)\}, \quad p \equiv p(\rho, t). \quad (2)$$

Теорема. *Решение системы уравнений МГД в бесконечном цилиндре, бесконечном коаксиальном цилиндре для слоистого течения жидкости (1), при предположениях (2) сводится к решению следующей системы уравнений*

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \mu_m \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right) \right), & \frac{v_\varphi^2}{\rho} &= \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial \rho} + \frac{1}{4\pi\rho_0} H_z \frac{\partial H_z}{\partial \rho}, \\ \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} &= \mu \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial v_\varphi}{\partial \rho} \right) \right) - \mu \frac{v_\varphi}{\rho^2}, & \frac{\partial v_z}{\partial t} &= \mu \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial v_z}{\partial \rho} \right) \right), \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{v_\varphi}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} &= \chi \Delta T + \frac{\mu_m}{4\pi\rho_0 c_p} \left(\frac{\partial H_z}{\partial \rho} \right)^2 + \frac{\mu}{c_p} \left\{ \left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial \rho} - \frac{v_\varphi}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial \rho} \right)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Исследовано изменение геометрии фрагмента области слоистого течения жидкости, тепловыделение в следствии движения границы области течения и объемного воздействия магнитным полем. Полученные результаты могут представлять интерес в связи с исследованием задачи управления динамикой несжимаемой жидкости [2].

Работа поддержана грантом РФФИ 18-01-00343 А.

ГИБРИДНАЯ МОДЕЛЬ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ОТКРЫТОЙ ЛОВУШКИ С ДИАМАГНИТНЫМ УДЕРЖАНИЕМ ПЛАЗМЫ

Е.А. Генрих, М.А. Боронина, В.А. Вшивков

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, mesyats@gmail.ru, boronina@ssd.sssc.ru, vsh@ssd.sssc.ru

Одной из фундаментальных проблем физики плазмы, в решении которой может помочь математическое моделирование, является задача создания установок для управляемого термоядерного синтеза (УТС). Ловушки для удержания плазмы делятся на открытые и закрытые. Ловушки закрытого типа (токамаки) обладают рядом недостатков, таких как низкое отношение давления плазмы к давлению удерживаемого магнитного поля, сложная конструкция магнитной системы и др. Вторым вариантом - ловушки открытого типа, в которых силовые линии магнитного поля приближенно обладают цилиндрической симметрией. В настоящее время в ИЯФ СО РАН разрабатывается новая концепция эффективного удержания плазмы в диамагнитном режиме работы Газодинамической ловушки (ГДЛ) [1]. В этом режиме давление плазмы близко к теоретическому пределу ($\beta = 1$), магнитное поле в занятой плазмой области близко к нулю, а в тонком слое на границе плазмы быстро возрастает диамагнитный “пузырь”. Для подтверждения этой концепции необходимо проведение детального исследования динамики плазмы и формирования необходимой самосогласованной структуры магнитного поля в условиях диамагнитного режима ловушки на основе численного моделирования.

Целью данной работы является исследование возможности формирования конфигурации магнитного поля, необходимого для удержания плазмы в диамагнитном режиме открытой ловушки. В работе представлена постановка математической модели осесимметричной открытой ловушки. Разработана гибридная двумерная численная модель для изучения процессов формирования согласованной с движением плазмы конфигурации магнитного поля. На основе метода частиц в ячейках в двумерной цилиндрической геометрии создана программа для моделирования нестационарного поведения магнитного поля в открытой ловушке. Представлены результаты проведенных численных экспериментов.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 18-31-00314 мол_а.

Список литературы:

1. *Beklemishev A.D.* Diamagnetic “bubble” equilibria in linear traps // *Physics of Plasmas*. 2016. Vol. 23. 082506

ПЕРВОЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ДЛЯ ДВУХМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ СТОКСА

В.П. Гердт¹, Ю.А. Блинков²

¹*Объединенный Институт Ядерных Исследований, gerdt@jinr.ru,*

²*Саратовский государственный университет, BlinkovUA@info.sgu.ru*

В работе предлагается полностью алгоритмический подход к построению первых дифференциальных приближений [1, 2] разностных схем для систем дифференциальных уравнений. Предлагаемый метод носит достаточно общий характер, например, уравнения в системе могут быть не эволюционного типа.

На примере нескольких разностных схем для системы двумерных стационарных уравнений Стокса построено для них первое дифференциальное приближение. На первом шаге система дифференциальных уравнений приводится в инволюцию [3]. Для рассматриваемой системы это означает ее дополнение уравнением Пуассона для давления. После приведения системы в инволюцию строим в явном виде ее условия совместности, которые затем должны быть проверены на разложение разностных схем в ряд Тейлора. Если порядок разложения меньше порядка исходных разностных схем, то это означает, что разностные схемы не обладают свойством сильной согласованности. Если проверка условия совместности выполняется, то в независимости от комбинирования первоначальных разложений исходных разностных схем в ряд Тейлора, построенные их первые дифференциальные приближения с точностью до порядка слагаемых можно привести к каноническому виду.

Нарушение свойства сильной согласованности говорит о том, что размерность пространство решений разностных схем не совпадает с размерностью пространства решений исходной системы дифференциальных уравнений.

Работа поддержана грантом РФФИ № 01-16-00080.

Список литературы:

1. Яненко Н.Н., Шокин Ю.И. О корректности первых дифференциальных приближений разностных схем // ДАН СССР, 1968, 182, № 4, 776.
2. Яненко Н.Н., Шокин Ю.И. Об аппроксимационной вязкости разностных схем // ДАН СССР, 1968, 182, № 2, 280.
3. Amodio Pierluigi, Blinkov Yuri, Gerdt Vladimir, La Scala Roberto Algebraic construction and numerical behavior of a new s-consistent difference scheme for the 2D Navier–Stokes equations. Applied Mathematics and Computation, 2017, vol. 314, pp. 408-421. DOI: 10.1016/j.amc.2017.06.037 Available at: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0096300317304502>

ПОСТРОЕНИЕ ПРЕДСКАЗАТЕЛЬНЫХ МОДЕЛЕЙ ВРЕМЕНИ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ

В.С. Гладких, А.В. Петухов

*Институт Вычислительной Математики и Математической Геофизики,
gladvs_ru@mail.ru, petukhov@lapasrv.sccc.ru*

Разработка оптимизированного наукоемкого программного обеспечения требует значительных усилий. Выбор связки алгоритм-реализация становится задачей номер один, так как в случае ошибки все затраченные усилия по реализации и оптимизации программы не дадут ожидаемого результата. Одним из вариантов решения проблемы является построение априорных оценок времени выполнения выбранной связки алгоритм-реализация. Представлен подход для оценки времени выполнения параллельной аппроксимации. На основании предложенного подхода осуществлялся выбор наиболее подходящего варианта параллелизации при разработке программного обеспечения для моделирования тепловых полей в вечномерзлой породе при действиях антропогенных факторов.

Работа поддержана РФФ № 14-11-00485-П в части разработки моделей и РФФИ № 16-29-15122 офи_м для реализации в прикладной задаче.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИССИПАТИВНЫХ ЭФФЕКТОВ В ЗАДАЧЕ ПРОТЕКАНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ КАНАЛ

В.Н. Говорухин

Южный федеральный университет, vngovoruhin@sfnedu.ru

Доклад посвящен анализу диссипативных эффектов при протекании идеальной жидкости через плоский канал. Как правило, движения идеальной жидкости порождают консервативную динамическую систему. Однако, при наличии не связанной с вязкими эффектами диссипации идеальная жидкость может демонстрировать явления, присущие диссипативным системам. Одним из таких случаев является протекание жидкости через область в постановке Н.Е.Кочина и В.И.Юдовича. При протекании частицы жидкости вносят завихренность и энергию в область течения через вход, и выносят их при покидании канала. Этот механизм порождает специфическую диссипацию в исследуемой задаче.

Изучение диссипативных свойств идеальной жидкости начато в работе Алексеева (1977), где установлена возможность асимптотической устойчивости проточных стационарных течений. Численный анализ [1-3] показал, что кроме тривиальных реализуются стационарные режимы, состоящие из связной проточной и нескольких рециркуляционных зон, в которых сохраняется консервативная динамика. Было показано, что возмущения не нарастают со

временем для многих найденных стационарных конфигураций. Также была обнаружена возможность реализации автоколебаний. До настоящего времени сценарии возникновения автоколебаний идеальной жидкости и природа обнаруженных нестационарных режимов оставалась не ясной.

В докладе изложены результаты численного исследования нетривиальных стационарных течений, описан бифуркационный сценарий, приводящих к автоколебаниям в задаче протекания идеальной жидкости сквозь прямоугольный канал с постоянной скоростью на границах и заданным распределением завихренности на входе в канал. Будут представлены использованные и разработанные численных методы. Это включает методы поиска и анализа устойчивости стационарных режимов, расчета нестационарных течений, исследования свойств автоколебаний.

Работа поддержана грантом РФФИ № 18-01-00453.

Список литературы:

1. *Говорухин В.Н., Моргулис А.Б., Юдович В.И.* Расчет двумерных режимов протекания идеальной несжимаемой жидкости сквозь прямоугольный канал // Доклады Академии Наук, т. 412, N 4, 2007, с. 480-484.
2. *Говорухин В.Н.* Стационарные вихревые структуры при протекании идеальной жидкости через канал // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 2. С. 11-22.
3. *Govorukhin V., Zhdanov, I.* Steady-state flows of inviscid incompressible fluid and related particle dynamics in rectangular channels // European Journal of Mechanics, B/Fluids, 2018, Vol.67, pp. 280-290.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЫВНЫХ РЕШЕНИЙ РАЗНОСТНОЙ МОДЕЛИ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ СО СВОЙСТВОМ НЕУБЫВАНИЯ ЭНТРОПИИ

С.К. Годунов¹, Д.В. Ключинский², С.В. Фортова³

¹*Институт математики им. Соболева СО РАН, godunov@math.nsc.ru*

²*Новосибирский государственный университет, dmitriy_klyuchinskiy@mail.ru*

³*Институт автоматизации проектирования РАН, sfortova@mail.ru*

В этой работе мы представляем новую частично линеаризованную конечно-разностную модель газовой динамики со свойством неубывания энтропии на разрывных решениях. Эта модель является логическим продолжением классической схемы [1] с нелинейными распадами, которые в текущей версии схемы заменены их упрощенными вариантами из книги [2]. Одномерные уравнения газовой динамики записываются в виде (1)-(3)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho u^2)}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(u(H + p))}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

с уравнением состояния $E = p / (\gamma - 1)\rho$. Здесь $H = \rho u^2 / 2 + p / (\gamma - 1)$ - функция энтальпии. Давление в газе представляется в виде $p = \sigma(S)\rho^\gamma$, где S - энтропия. Скорость звука определяется по формуле $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$.

Свойство гарантированного неубывания энтропии было подтверждено численными расчетами различных конфигураций задачи о распаде произвольного разрыва. Показано, что решение обсуждаемых задач на мелких сетках не приводит к каким-либо сложностям или неожиданным эффектам. Показаны зависимости ширины ударных волн и времени их формирования от выбора числа Куранта и шага расчетной сетки. Поднимается вопрос о точности решений в окрестности разрывов.

Работа поддержана грантом РФФИ № 18-31-00303.

Список литературы:

1. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // Матем. сб. 1959. Т.3 Вып.89. №47. С.271-306.
2. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: НАУКА, 1976.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗНОСТНЫХ МОДЕЛЕЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ С УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

С.К. Годунов¹, М.В. Шамолин², С.В. Фортова³, В.В. Шепелев³

¹Институт математики СО РАН, г. Новосибирск

²Институт механики МГУ им. М.В. Ломоносова, г. Москва

³Институт автоматизации проектирования РАН, sfortova@mail.ru

В работе описывается линеаризованная редакция [1, 2] классической схемы Годунова [3] для одномерной нелинейной системы уравнений газовой динамики. Показано, что данный вариант схемы обладает свойством гарантированного неубывания энтропии, позволяющим моделировать её рост на ударных волнах. Исследована структура разрывных решений на примере задачи об изолированной ударной волне и задачи о распаде произвольного разрыва. Показаны зависимости ширины ударных волн и времени их формирования от выбора числа CFL. Предложен метод проверки точности

разрывных решений, основанный на расчете интеграла от законов сохранения по фиксированному контуру вокруг разрыва.

Численное исследование структуры полученных решений, сходимости разрывных решений в обобщенном смысле и точности разрывного решения при измельчении расчетной сетки необходимы для формулировки строгих математических утверждений о компактности сеточных функций и об их сходимости к обобщенным решениям нелинейных гиперболических систем уравнений газовой динамики.

Для линейных систем гиперболических уравнений понятие обобщенного решения [4] было введено С.Л. Соболевым. Для случая системы нелинейных уравнений газовой динамики в работе сделана попытка построить определение обобщенного решения, корректное в смысле существования решения для задачи с разрывными начальными условиями.

Список литературы

1. *S.K. Godunov, D.V. Klyuchinskiy, A.V. Safronov, S.V. Fortova and V.V. Shepelev* Experimental study of numerical methods for the solution of gas dynamics problems with shock waves, *J. Phys.: Conf. Ser.*, Volume 946, 012048 (2018).
2. *Сафронов А.В.* Разностный метод для уравнений газодинамики из соотношений на разрывах // Матем. моделирование. - 20:2 (2008), 76-84.
3. *Годунов С.К., Забродин А.В., Яковлевич М.И., Крайко А.Н., Прокопов Г.П.* Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: Наука, 1976, с. 100-110.
4. *Годунов С.К.* Проблема обобщенного решения в теории квазилинейных уравнений и в газовой динамике // УМН. - 17:3(105) (1962), 147-158.

КОМПАКТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ, ИМИТИРУЮЩИЕ ЗАДАЧУ КОШИ

В.А. Гордин^{1,2}

¹*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»*

²*ФГБУ «Гидрометцентр России»*

Компактные разностные схемы хорошо известны и демонстрируют высокий порядок точности для дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Разработаны алгоритмы построения компактных схем 4 порядка для краевых задач с переменным (гладким и со скачком) коэффициентом. Для уравнений диффузии с гладким переменным коэффициентом и уравнения Левина – Леонтовича также построены разностные схемы и экспериментально подтвержден их 4 порядок. Метод построения компактных схем 4-го порядка можно обобщить на уравнения и системы в частных производных со слабой нелинейностью, например, на

уравнение Фишера – Колмогорова – Петровского – Пискунова, нелинейное уравнение Шрёдингера или система Фитцхью – Нагумо. Для нелинейных задач используются различные итерационные методы и производится их сравнение по быстродействию. Экстраполяция Ричардсона позволяет повысить порядок схем до 6-го.

Для ряда разностных схем, аппроксимирующих важнейшие эволюционные уравнения математической физики построены специальные граничные условия, имитирующие задачу Коши на всей прямой. Разностные граничные условия существенно зависят и от типа разностной схемы, и даже от коэффициентов соответствующего дифференциального уравнения. Эти граничные условия определяются с точностью до нормировки. Но при численной реализации выбор этой нормировки оказывается весьма существен. Важную роль играют аппроксимации Паде – Эрмита символа соответствующего псевдодифференциального оператора.

Работа была поддержана грантом № 18-05-0011 в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» 2018 - 2019 гг. и в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации "5-100".

Список литературы

1. Гордин В.А. О смешанной краевой задаче, имитирующей задачу Коши. Успехи матем. наук, 33(5), с.181-182, 1978.
2. Гордин В.А. Применение проекторов в прогностических схемах. Труды Гидрометцентра СССР, № 212, с.79-96 (1978).
3. Гордин В.А. Граничное условие полного поглощения волн, выходящих из прогностической области для дифференциального уравнения в частных производных. Труды Гидрометцентра СССР, № 242, с.104-120 (1982)
4. Гордин В.А. Применение векторной аппроксимации Паде для численного решения эволюционных прогностических уравнений. Метеорология и гидрология, N11, pp.24-37 (1982).
5. Гордин В.А. Математические задачи гидродинамического прогноза погоды. Вычислительные аспекты. Ленинград, Гидрометеиздат, 264с (1987).
6. Гордин В.А. Математика, компьютер, прогноз погоды и другие сценарии математической физики. М., ФИЗМАТЛИТ, 733 стр. 1-е изд. 2010, 2-е изд. 2012-2013.
7. Gordin V.A., Tsymbalov E.A. Compact difference schemes for the diffusion and Schrodinger equations. Approximation, stability, convergence, effectiveness, monotony // Journal of Computational Mathematics, Vol. 32, No.3, 2014, pp. 348-370. <http://www.global-sci.org/jcm/galley/JCMCR-14.pdf>

8. *Гордин В.А.* Дифференциальные и разностные уравнения. Какие явления они описывают и как их решать. «Издательский дом ВШЭ», М., 2016. 530 стр.
9. *Гордин В.А., Цымбалов Е. А.* Разностная схема 4-го порядка точности для дифференциального уравнения с переменными коэффициентами. Математическое моделирование, 2017, т.29, №7, стр.3-14 (Russian). V.A. Gordin, E.A. Tsymbalov. 4-th order difference scheme for differential equation with variable coefficients. Mathematical Models and Computer Simulations, v.10, №1, pp.3-14, 2018 (English).
10. *Гордин В. А., Цымбалов Е. А.* Компактная разностная схема для дифференциального уравнения с кусочно-постоянным коэффициентом // Математическое моделирование. 2017, т.29, №12, стр.16-28.
11. *Gordin V.A., Tsymbalov E.A.* Compact difference scheme for parabolic and Schrodinger-type equations with variable coefficients. J. Comp. Phys. 2018.

РАЗЛИЧНЫЕ ПОДХОДЫ УМЕНЬШЕНИЯ ВКЛАДЫВАЕМОЙ ЭНЕРГИИ ДЛЯ ЗАГОРАНИЯ МИШЕНЕЙ ТЯЖЕЛОИОННОГО СИНТЕЗА

Г.В. Долголева^{1,2}

¹*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, dolgg@list.ru,*

²*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*

У истоков этой темы стояли А. Ф. Сидоров и А.В. Забродин, которым в этом году исполнилось бы 85 лет. Их Светлой памяти доклад и посвящается.

Рассматриваемые цилиндрические мишени базируются на платформе безударного сжатия, что позволяет получить очень большие сжатия мишеней, так необходимые для их горения. Мишень- это слоистая система, в которой один слой, называемый "рабочим", состоит из дейтериево- тритиевой смеси (DT) или другой смеси, в которой происходят термоядерные реакции. В мишень вводится энергия, под действием которой «рабочая» область сжимается и начинается «горение», т.е. происходят термоядерные реакции и выделяется энергия. При этом энерговыход в результате термоядерных реакций должен быть больше, чем вложенная энергия (коэффициент усиления больше единицы). И очень важный вопрос- величина вкладываемой энергии.

Цель работы - выбор закона энерговложения для цилиндрической мишени инерционного тяжелоионного синтеза (ИТИС) с целью минимизации вкладываемой энергии и получение коэффициента термоядерного усиления больше единицы.

В докладе рассматриваются следующие способы уменьшения вкладываемой энергии.

1. Однокаскадная мишень- в ней четыре слоя и энергия вкладывается в один из слоев.

2. Двухкаскадная мишень- в ней увеличивается число слоев по сравнению с однокаскадной и энергия вкладывается в два слов.

3. Однокаскадная система, но в ней аблятор (область соседняя с рабочей) урановая.

4. Быстрый поджиг- вначале мишень сжимается, а затем второй «поджигающий» импульс вводится непосредственно в рабочую область.

Анализируются все перечисленные подходы: их положительные и отрицательные стороны.

Список литературы:

1. Долголева Г.В., Забродин А.В. Кумуляция энергии в слоистых системах и реализация безударного сжатия. М: Физматлит, 2004.
2. Субботин В.И., Долголева Г.В., Забродина Е.А., Забродин А.В., Баско М.М., Имшенник В.С. Разработка энергетической установки синтеза и деления на основе микромишеней прямого действия и мощного тяжелоионного драйвера содержащими делящиеся материалы // Атомная энергия. 2004. Т.97. Вып. 3. С. 190-198.

РАЗЛИЧНЫЕ СПОСОБЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТОРОИДАЛЬНЫХ КАТУШЕК В НИЗКОЧАСТОТНЫХ ЗАДАЧАХ

А.А. Долгун

*Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН,
DolgunAA@ipgg.sbras.ru*

Для расширения возможностей исследования пространства вокруг скважины и выявления в нем полезных ископаемых в ООО НПП ГА «Луч» и ИНГГ СО РАН разрабатывается новый прибор – зонд с тороидальными генераторными и измерительными катушками. Зонд предназначен для измерения удельной электропроводности и электрической макроанизотропии горных пород с высоким радиальным и вертикальным разрешением.

Моделирование электромагнитных полей, создаваемых прибором, выполняется с помощью векторного метода конечных элементов. При этом одной из возникающих проблем является задание источников поля в виде тороидальных катушек. Моделирование тороидальной катушки в виде множества витков создает затруднения при построении сетки. Требуется большое количество тетраэдров, при увеличении количества витков густота сетки увеличивается до неприемлемых значений и т.п. Поэтому в данной работе рассматриваются альтернативные способы представления тороидальных катушек, не требующие построения отдельных витков.

Первый способ – замена катушки на эквивалентный виток магнитного тока. Магнитный ток представляет собой некоторый искусственный источник в законе Фарадея (одном из уравнений системы Максвелла), дающий такое же

поле, как множество витков. Для расчета электромагнитного поля тонкого электрического тока в квазистационарном приближении существуют известные формулы, основанные на дипольном приближении, например [1]. Подобные формулы по аналогии были получены автором для магнитного тока. Путем сравнения полей в обоих случаях и использования линейности уравнений Максвелла была выведена зависимость величины магнитного тока от величины электрического тока, параметров катушки (количества витков и радиусов), параметров среды и частоты.

Второй способ – использование вместо отдельных витков непрерывного распределения тока по поверхности катушки. Данный способ требует примерно столько же тетраэдров, как представление отдельными витками, но не приводит к увеличению их количества при увеличении количества витков.

Проведенные численные эксперименты показывают хорошее совпадение электрического и магнитного полей, создаваемых всеми способами представления тороидальных катушек, в том числе, в неоднородной среде.

Список литературы:

1. *Жданов М.С.* Электроразведка. – М.: Недра, 1986.

ДИСПЕРСИОННЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ РЕШЕНИЙ БЕСКОНЕЧНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

Т.В. Дудникова

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, tdudnikov@mail.ru

Рассматривается смешанная задача для бесконечной системы гармонических осцилляторов на полупрямой:

$$\begin{aligned} \ddot{u}(x,t) &= (\nu^2 \Delta_L - m^2)u(x,t), & x \in \mathbb{N}, & \quad t > 0, \\ \ddot{u}(0,t) &= \nu^2 (u(1,t) - u(0,t)) - m^2 u(0,t) - \kappa u(0,t) - \gamma \dot{u}(0,t), & t > 0, \\ u(x,0) &= u_0(x), \quad \dot{u}(x,0) = v_0(x), & x \in \mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \dots\}. \end{aligned}$$

Здесь $u(x,t) \in \mathbb{R}$, $\nu > 0$, $m, \kappa, \gamma \geq 0$, $\Delta_L u(x) := u(x+1) - 2u(x) + u(x-1)$, $x \in \mathbb{Z}$.

Предполагается, что начальные данные $Y_0(x) = (u_0(x), v_0(x))$ принадлежат гильбертову пространству $\mathcal{H}_{\alpha,+} := l_{\alpha,+}^2 \otimes l_{\alpha,+}^2$, $\alpha \in \mathbb{R}$, последовательностей с нормой $\|Y_0\|_{\alpha,+}^2 := \sum_{x \in \mathbb{Z}_+} \langle x \rangle^{2\alpha} (|u_0(x)|^2 + |v_0(x)|^2)$, $\langle x \rangle = \sqrt{1+x^2}$.

На коэффициенты m, κ, γ, ν системы накладывается условие **C** или **C₀**.

C. Если $\gamma \neq 0$, то m или κ не равно нулю. Кроме того, если $\gamma \in (0, \nu)$ и $m = 0$,

то $\kappa \neq 2(\nu^2 - \gamma^2)$; если $\gamma \in \left(0, \left(\sqrt{m^2 + 4\nu^2} - m\right)/2\right]$ и $m \neq 0$, то $\kappa \neq \nu^2 - \gamma^2 \pm \sqrt{(\nu^2 - \gamma^2)^2 - m^2\gamma^2}$. Если $\gamma = 0$, то $\kappa \in (0, 2\nu^2)$.

\mathbf{C}_0 . $\gamma = 0$ и $\kappa = 2\nu^2$ или $\sqrt{\quad} = \kappa = 0$ и $m \neq 0$.

Основной целью является доказать, что для любых начальных данных $Y_0 \in \mathcal{H}_{\alpha,+}$, где $\alpha > 3/2$, решение системы $Y(x,t) = (u(x,t), \dot{u}(x,t))$ удовлетворяет следующей оценке

$$\|Y(\cdot, t)\|_{-\alpha,+} \leq C \langle t \rangle^{-\beta/2} \|Y_0\|_{\alpha,+}, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $\beta = 3$, если выполнено условие \mathbf{C} , и $\beta = 3$, если справедливо условие \mathbf{C}_0 .

Аналогичный результат был получен ранее для гамильтоновой системы, состоящей из дискретного поля Клейна - Гордона и частицы.

Список литературы:

1. Дудникова Т.В. Долговременная асимптотика решений некоторой гамильтоновой системы на решетке // Проблемы Матем. Анализа. 2016. Т.85. С. 69-82.
2. Дудникова Т.В. Поведение при больших временах бесконечной системы гармонических осцилляторов на полупрямой // Труды МИАН. 2018. Т.301.

ПЕРЕМЕЖАЕМОСТЬ КОРНЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ И СПЕКТР ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ЗАДАЧИ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

А.В. Дьяченко¹, Г.А. ван Беверн²

¹Институт прикладной математики им.М.В. Келдыша РАН,
diachenko@sfedu.ru

²Новосибирский Государственный Университет, gvbevern@yandex.com

Мы говорим, что нули двух функций перемежаются, если нули обеих действительны, и если нули первой функции разделяются нулями второй, а нули второй функции разделяются нулями первой. Данным свойством обладают, например, любая последовательность ортогональных многочленов на действительной оси. Оно близко связано с устойчивостью в смысле Гурвица, что и используется в нашем исследовании.

Доклад посвящен сформулированной в работе [1] гипотезе, что нули соседних многочленов в последовательности

$$\varphi_n^{(\alpha,\beta)}(\mu) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{d^{2k}}{dx^{2k}} P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \Big|_{x=1} \cdot \mu^k = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \sum_{k=0}^{[n/2]} (-n)_{2k} \frac{(n+\alpha+\beta+1)_{2k}}{(\alpha+1)_{2k}} \left(\frac{\mu}{4}\right)^k,$$

где $n = 1, 2, \dots$, перемежаются. Здесь $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ – n -тый многочлен Якоби и $(\alpha + 1)_n = (\alpha + 1) \cdot (\alpha + 2) \cdots (\alpha + n)$ – символ Похгаммера. Такие многочлены возникают при решении задачи на собственные значения для оператора Лапласа с помощью тау-метода Якоби (или метода Галёркина с полиномиальным базисом). Если гипотеза верна, то спектр у всех приближений оказывается действительным, и в этом смысле приближения хорошо отражают свойства приближаемой задачи.

Развивая подход [2] к сформулированной гипотезе, мы в [3] не только показываем её верность при

$$-1 < \alpha < 0, -1 < \beta, \quad 0 < \alpha < 1, 0 < \beta \quad \text{и} \quad 1 < \alpha < 2, 1 < \beta,$$

но и получаем результат относительно перемежаемости корней многочленов $\varphi_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ и $\varphi_{n-2}^{(\alpha, \beta)}(x)$ (о чём также ставился вопрос в работе [1]).

Работа была выполнена при поддержке европейского исследовательского совета, грант (FP7/2007–2013)/ERC, соглашение №259173.

Список литературы:

1. *Csordas G., Charalambides M., Waleffe F.* A new property of a class of Jacobi polynomials // Proc. Amer. Math. Soc., 133 (2005), №12, С. 3551–3560.
2. *Charalambides M., Waleffe F.* Spectrum of the Jacobi Tau Approximation for the Second Derivative Operator // SIAM J. Numer. Anal., 46 (2008), №1, С. 280–294.
3. *Dyachenko A., van Bevern G.* On conjectures by Csordas, Charalambides and Waleffe // Proc. Amer. Math. Soc. 144 (2016), №5, С. 2037–2052.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПАДЕ РАЗРЫВА В ГРАВИТАЦИОННОМ ПОЛЕ

Е.А. Забродина

*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
katja@kiam.ru*

При расчете процессов в протопланетном диске численно интегрируется система газодинамических уравнений Эйлера с учетом гравитации и вращения. В методе Годунова для нахождения потоков между двумя точками решается задача о распаде разрыва [1], которая также выводится из законов сохранения массы, импульса и энергии на фронте ударной волны или энтропии в волне разрежения. При этом обычно полагают, что правые части уравнений сохранения равны нулю, а "источники", которые могут быть из-за влияния внешних сил, добавляются только в конце расчета временного шага.

В данной работе предлагается их учесть и на этапе распада разрыва. Задача усложняется. Оказывается, что для случая ударной волны плотность в зависимости от давления за фронтом не выражается в явном виде. Поэтому

вместо одного уравнения относительно давления, которое обычно решается итерационно, требуется на каждой итерации дополнительно решить уравнение относительно плотности, к которому сводится уравнение сохранения энергии, где давление является параметром. Если возможна конфигурация из двух ударных волн, то и дополнительных уравнений будет два - для плотности с обеих сторон от контактного разрыва. Сложность заключается в том, что такая система уравнений может иметь несколько решений, и тогда нужно выбрать то, которое дает наибольшую скорость волны в каждом направлении, а может вовсе не иметь решения.

В случае волны разрежения энтропия по-прежнему считается постоянной, а разность между инвариантами Римана равна не нулю, а скорости, обязанной сложению гравитационной и центробежной сил. Плотность на разрыве здесь по-прежнему явно выражается через давление. Поэтому при отсутствии решения в уравнении сохранения энергии, которое используется для ударной волны, вместо него в некоторых случаях можно воспользоваться решением уравнения сохранения импульса с учетом сохранения энтропии, которое обычно используется для волны разрежения.

В результате удастся найти все газодинамические величины на контактном разрыве. Несмотря на увеличение времени счета, для некоторых задач может оказаться полезен выигрыш в точности.

Работа поддержана Президиумом РАН № 17 «Эволюция органического мира. Роль и влияние планетарных процессов».

Список литературы:

1. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. – М.: НАУКА, 1976.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВУХФАЗНЫХ ТЕЧЕНИЙ С ДИФФУЗНЫМ МЕЖФАЗНЫМ ИНТЕРФЕЙСОМ

Н. А. Зайцев, Б.В. Критский

*Институт прикладной математики им.М.В. Келдыша РАН,
nikolai_zaitsev@mail.ru, boris.v.kritskiy@gmail.com*

В настоящее время в большинстве практических задач, связанных с моделированием двухфазных сред (например, в задачах расчета безопасности реакторов), используется модель двух взаимопроникающих континуумов — каждый континуум является представителем одной фазы. Для определения параметров континуума масса, импульс и энергия каждой фазы в элементарном объеме "размазывается" по всему элементарному объему, т.е. осредняются. Понятно, что осреднение обедняет модель: в общем случае по средним полям невозможно восстановить исходные распределения. Например, мелкая пена и

стратифицированное течение фаз могут быть практически неразличимы при осредненном описании. Чтобы сохранить различие свойств таких течений приходится составлять карту режимов течений и для каждого режима подбирать свое замыкание модели. Переключение режимов фактически осуществляется вручную при моделировании конкретного течения.

В разрабатываемом подходе предлагается рассматривать всю область течения заполненной одной средой (континуумом), имеющей в каждой точке одну плотность, одну скорость и одну внутреннюю энергию.

Второй особенностью данного подхода является то, что межфазная граница изначально рассматривается не как поверхность, а как зона некоторой протяженности, то есть переход от одной фазы к другой характеризуется быстрым, но все же непрерывным, изменением плотности.

Для учета капиллярных сил в рамках диффузного интерфейса в законе сохранения импульса используется тензор капиллярных напряжений Кортвега:

$$\mathbf{T} = K \left(\rho \Delta \rho + \frac{1}{2} |\nabla \rho|^2 \right) \mathbf{I} - K \nabla \rho \otimes \nabla \rho,$$

где K — пропорциональный коэффициенту поверхностного натяжения коэффициент капиллярной (градиентной) энергии [1].

Для расчета течений на основе этой модели разработан локальный разрывный метод Галеркина для среды Ван-дер-Ваальса. Рассчитаны одномерные, двумерные и трехмерные тесты.

Работа поддержана Российским научным фондом (проект № 14-21-00025).

Список литературы:

1. *Anderson D.M., McFadden G.B., Wheeler A.A.* Diffuse-interface methods in fluid mechanics // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 30 (1998), p. 139–165.

УСЛОВИЯ L^2 -ДИССИПАТИВНОСТИ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ КГД-РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ 1D УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

А.А. Злотник, Т.А. Ломоносов

НИУ Высшая школа экономики, Москва, azlotnik@hse.ru, tlomonosov@hse.ru

Квазигазодинамическая (КГД) система уравнений представляет собой регуляризованную систему уравнений газовой динамики и активно используется при численном решении разнообразных задач [1,2]. Известна параболичность по Петровскому КГД системы. С ней связан класс явных двухслойных по времени и симметричных по пространству разностных схем с регуляризацией.

Вопросы теории таких разностных схем, включая актуальный на практике анализ условий их устойчивости, пока разработаны слабо. Для 1D разностных схем, линеаризованных на постоянном решении с нулевой скоростью $u_* = 0$,

достаточные условия L^2 -диссипативности решений были получены в [2] энергетическим методом.

В настоящей работе анализируется как случай $u_* = 0$, так и впервые случай $u_* \neq 0$, и выводятся новые как необходимые, так и достаточные условия L^2 -диссипативности. Они дают существенную для практики информацию. При $u_* = 0$ эти условия различаются между собой не более чем в 2 раза; достаточное условие существенно улучшает результат из [2]. При $u_* \neq 0$ условия даны в зависимости от числа Маха. Показано, что можно обеспечить независимость условия на число Куранта, определяющего шаг по времени, от числа Маха. Эти условия базируются на новых результатах для соответствующих абстрактных разностных схем, выведенных с помощью спектрального подхода [3]. Результаты существенно развивают анализ линеаризованной схемы Лакса-Вендроффа в [4]. Подробно они представлены в [5].

Работа поддержана грантом РФФИ № 16-01-00048.

Список литературы:

1. *Елизарова Т.Г.* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. – М.: Научный мир, 2007.
2. *Шертов Ю.В.* Динамика сплошных сред при пространственно-временном осреднении. Москва-Ижевск: РХД, 2009.
3. *Годунов С.К., Рябенский В.С.* Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
4. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. М.: Мир, 1972.
5. *Злотник А.А., Ломоносов Т.А.* Об условиях L^2 -диссипативности линеаризованных явных КГД-разностных схем для уравнений одномерной газовой динамики // Докл. АН. 2018 (сдано в печать).

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЕ ЯДРО QGDFOAM В ОТКРЫТОМ ПРОГРАММНОМ КОМПЛЕКСЕ OPENFOAM

М.А. Истомина

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, m_ist@mail.ru

Для решения задач газовой динамики создано новое вычислительное ядро QGDfoam, вставленное в открытый программный комплекс OpenFOAM.

В основе алгоритма лежит квазигазодинамическая (КГД) система уравнений газовой динамики [1]. OpenFOAM - открытая интегрируемая платформа для численного моделирования задач механики сплошных сред, в которой используется метод конечного объема. Пакет OpenFOAM предназначен для вычисления операций со скалярными, векторными и тензорными полями. Преимуществами OpenFOAM являются ориентированность на пользователя, разделение решателя и пре-

постпроцессинга. Для внедрения КГД алгоритма в пакет OpenFOAM квазигазодинамическая система была переписана в виде, необходимом для имплементации в среду OpenFOAM.

Созданный решатель QGDFoam был протестирован на системе характерных газодинамических тестов.

Исходные и дальнейшие 3D-версии решателя QGDFoam находятся в открытом доступе на <http://github.com/unicfdlab/QGDSolver/>.

С помощью решателя QGDFoam исследуются свойства КГД алгоритма на различных сетках.

Работа поддержана грантом РФФИ № 18-01-00587 и программой Президиума РАН № 26.

Список литературы:

1. *Т.Г. Елизарова* Квазигазодинамические уравнения и методы расчета вязких течений. - Москва: Научный мир, 2007 г.

О ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МАТРИЧНОГО МЕТОДА И МЕТОДА ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ БЕРСА

В.В. Калманович¹, М.А. Степович¹, Е.В. Серегина²

¹*Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского,
v572264@yandex.ru, m.stepovich@rambler.ru*

²*Московский государственный технический университет им.*

Н.Э. Баумана

*(национальный исследовательский университет), Калужский филиал,
evfs@yandex.ru*

Рассмотрены возможности совместного использования матричного метода и метода обобщённых степеней Берса для численного решения задач тепло-массопереноса. Изначально предлагаемый метод является аналитическим, он применим для решения задач тепло-массопереноса в однородной или многослойной среде со сдвиговой, осевой или центральной симметрией для произвольного количества слоёв, в том числе с распределёнными параметрами. Моделирование сводится к последовательному умножению функциональных матриц второго порядка, компоненты которых в каждой точке определяются физическими и геометрическими параметрами текущего слоя [1, 2]. Возможность применения метода для произвольного числа слоёв среды позволяет использовать его в качестве численного. Используя предлагаемый подход, разработан метод численного решения стационарного неоднородного уравнения диффузии в планарном полупроводниковом материале. Получена оценка погрешности результатов численного решения рассматриваемого класса дифференциальных уравнений.

Работа поддержана грантом РФФИ № 16-03-00515 и грантом РФФИ и правительства Калужской области № 18-42-400001.

Список литературы:

1. *Гладышев Ю.А., Калманович В.В., Степович М.А.* О возможности приложения аппарата Берса к моделированию процессов тепломассопереноса, обусловленного электронами в планарной многослойной среде // Поверхность. Рентген., синхротрон. и нейтрон. исследования. 2017. № 10. С. 105-110.
2. *Гладышев Ю.А., Калманович В.В., Степович М.А.* Матричный метод моделирования распределения неосновных носителей заряда, генерированных электронным пучком в полупроводниковом материале // Современные проблемы математического моделирования, обработки изображений и параллельных вычислений: Труды международной научной конференции (4-11 сентября 2017 г., пос. Дивноморское, Краснодарский край, Донской государственный технический университет, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН). Том. 1. – Ростов-на-Дону: ООО «ДГТУ-Принт», 2017. С. 85-93.

ИНВАРИАНТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ НЕЛИНЕЙНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ, ОБЛАДАЮЩИЕ ЗАКОНАМИ СОХРАНЕНИЯ

Е.И. Капцов¹, В.А. Дородницын¹, А.Ф. Шевяков²

¹*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
evgkaptsov@gmail.com, dorodnitsyn@keldysh.ru*

²*Department of Mathematics and Statistics, University of Saskatchewan,
Canada schevyakov@math.usask.ca*

С помощью методов группового анализа [1, 2] и т.н. «прямого метода» [4] устанавливаются законы сохранения для линейного волнового уравнения и для нелинейного волнового уравнения специального вида [5].

С помощью разностного аналога прямого метода [3, 4] производится построение инвариантной консервативной схемы линейного волнового уравнения, обладающей разностными аналогами всех законов сохранения, приведенных в дифференциальном случае. Для нелинейного волнового уравнения с помощью прямого метода строятся семейства схем, обладающие неполным набором разностных законов сохранения (а именно: одним, двумя и тремя законами сохранения). Показано, что на 9-точечном разностном шаблоне приведенными семействами схем исчерпываются инвариантные полиномиальные схемы, обладающие законами сохранения. Т.о. произведена

классификация схем для нелинейного волнового уравнения при некоторых, достаточно общих, ограничениях.

Обсуждается применимость разностного аналога тождества Нётер [3] в случае разностных схем от двух независимых переменных, заданных на равномерной ортогональной сетке.

Работа поддержана грантом РФФИ № 18-01-00890.

Список литературы:

1. *Овсянников Л.В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978.
2. *Олвер П.* Приложение групп Ли к дифференциальным уравнениям. – М.: Мир, 1989.
3. *Дородницын В.А.* Групповые свойства разностных уравнений. – М.: Физматлит, 2001.
4. *Bluman G.W., Cheviakov A.F., Anco S.C.* Applications of Symmetry Methods to PDEs – Springer-Verlag New York, 2010.
5. *Cheviakov A.F., Ganghoffer J.F.* One-dimensional nonlinear elastodynamic models and their local conservation laws with applications to biological membranes // [Journal of the Mechanical Behavior of Biomedical Materials](#). 2016. Vol.58. P.105-121.

СПЕКТРАЛЬНЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ НА ОСНОВЕ ОПЕРАТОРОВ ЛАПЛАСА И ГЕЛЬМГОЛЬЦА

И.Ю. Колесников

Геофизический центр РАН, kol@wdcb.ru

Спектральные конечные элементы были введены в метод конечных элементов на основе ортогональных алгебраических полиномов высокого порядка (многочленов Чебышева и Лежандра) и нашли применение при решении некоторых задач механики деформируемого твердого тела и механики жидкости [1]. Однако ортогональные многочлены высоких степеней быстро осциллируют вблизи границы, что порождает вычислительные трудности при их дифференцировании. Кроме того, с повышением порядка алгебраической аппроксимации возникает необходимость обязательного введения внутренних узловых степеней свободы с последующим их устранением с помощью трудоемких численных процедур статической конденсации.

Указанных недостатков лишены спектральные конечные элементы с произвольным числом только граничных узлов на основе неалгебраических спектральных функций формы, являющихся решениями интерполяционных задач Дирихле для уравнений Лапласа и Гельмгольца [2-3]. В работе [4] эти функции формы были использованы для решения жестких конечно-элементных задач об изгибе тонких пластин с кинематикой Рейсснера-Миндлина.

Разрешение проблематики сдвигового запираания для схемы выборочно-сокращенного интегрирования в случае сильно связанных границ, для слабо связанных границ допускало, однако еще возможность проявления нулевых энергетических мод и поэтому схема [4] нуждалась в модификации, что и стало предметом данной работы. Сформированы совместные стабилизирующие сдвиговые конечные элементы, воспроизводящие поперечные сдвиговые силы, физически мотивированное «размещение» которых полностью устраняет любые ложные осцилляции решения для схемы выборочно-сокращенного интегрирования [4] независимо от характера связанности границ.

Список литературы:

1. *P.M. Gresho and R.L. Sani. Incompressible Flow and the Finite Element Method. Vol.1 and Vol.2. – Chichester: John Wiley & Sons, Ltd. 2000.*
2. *Колесников И.Ю. Применение модульного подхода к расчету пластин // Изв. АН СССР. МТТ. 1984. №5. С.136-141.*
3. *Горшков А.Г., Колесников И.Ю. Граничный оператор Грина и функции формы для канонического блока в пространственной задаче несвязанной термоупругости // Изв. АН СССР. МТТ. 1990. №3. С.14-21.*
4. *Горшков А.Г., Колесников И.Ю. Конечные элементы на основе полного семейства неполиномиальных определяющих функций формы для произвольного числа граничных узлов // Изв. РАН. МТТ. 1998. №1. С.116-129.*

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА КУЭТТА

А.В. Коптев

*Государственный университет морского и речного флота
имени адмирала С.О. Макарова, Alex.Koptev@mail.ru*

Задача Куэтта о движении вязкой несжимаемой жидкости между двумя параллельными плоскостями представляет одну из классических задач теоретической гидромеханики [1,2]. Простейший вариант задачи предполагает рассмотрение установившегося движения жидкости в канале между плоскостями $y = \pm 1$ при условии, что одна из плоскостей (верхняя) движется с постоянной скоростью U_0 , а другая (нижняя) покоится. Поскольку для данной задачи важны эффекты вязкого трения, то решение строится на основе уравнений Навье – Стокса при граничных условиях прилипания на стенках канала. В безразмерных переменных область течения соответствует неравенству $-1 < y < 1$, и граничные условия имеют вид

$$u(x,1) = 1, u(x,-1) = 0, v(x,1) = 0, v(x,-1) = 0. \quad (1)$$

Если предполагать, что течение одномерно и линии тока параллельны границам, то известно простое решение поставленной задачи

$$u(x,y) = \frac{1+y}{2}, \quad v(x,y) = 0, \quad p(x,y) = p_0. \quad (2)$$

Такого рода задачи возникают в различных областях. Примерами таких областей являются: машиностроение, трибология, гидротехника, кардиология. Однако многочисленные эксперименты и визуальные наблюдения показывают, что решение (2) очень редко реализуется на практике. Куда чаще встречаются ситуации, когда течение носит явно не одномерный характер и его параметры значительно изменяются во времени. Все это заставляет вновь обращаться к этой классической задаче и сосредоточиться на поиске заведомо не одномерных решений на основе нестационарных 2D уравнений Навье – Стокса. При этом предполагается, что скорость движения верхней пластины представляет некоторую заданную функцию времени $f(t)$.

Предлагается ограничиться областью течения, соответствующей неравенствам $-1 < x < 1$, $-1 < y < 1$ и искать решение задачи в виде разложений

$$u = \frac{(1+y)}{2} f(t) + (1-y^2) \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{N-n} a_{nm}(t) x^n y^m, \quad v = (1-y^2) \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{N-n} b_{nm}(t) x^n y^m, \\ p - p_0 = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^{N-n} c_{nm}(t) x^n y^m, \quad (3)$$

где $f(t)$ заданная функция времени, N – номер приближения, $a_{nm}(t)$, $b_{nm}(t)$, $c_{nm}(t)$ некоторые пока не определенные коэффициенты, зависящие от времени.

Выражения (3) обеспечивают выполнимость граничных условий, и частный случай $f(t)=1$, $a_{nm}(t)=b_{nm}(t)=c_{nm}(t)=0$ соответствуют известному простому решению (2). Для решения задачи в указанной постановке применен интеграл уравнений Навье – Стокса, полученный автором в работах [3,4]. В результате задача сводится к системе шести обыкновенных дифференциальных уравнений типа Риккати относительно функций времени, через которые выражаются неизвестные $a_{nm}(t)$, $b_{nm}(t)$, $c_{nm}(t)$. Данная система уравнений решена численно с помощью стандартных программ пакета Maple. В результате для двух вариантов явного задания функции $f(t)$ и для широкого диапазона значений времени t были построены эпюры скоростей и давлений. Выявлены зоны интенсивных вихревых движений и зоны возвратных движений. Решения некоторых задач в аналогичной постановке приведены в работах [5,6].

Список литературы:

1. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч.2.– М.: Физматлит, 1963.
2. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. – Л.: ЛГУ им. А.А. Жданова, 1978.

3. *Koptev A.V.* Structure of Solution of the Navier – Stokes Equations. – Вестник национального исследовательского ядерного ун-та МИФИ. – 3(6), 2014, С.556-560.
4. *Koptev A.V.* Integrals of Motion of an Incompressible Medium Flow. From Classic to Modern. – Handbook on Navier – Stokes Equations: Theory and Applied Analysis. – Nova Sciences Publishers. Inc., New York, 2017, P. 443-459.
5. *Koptev A.V.* Nonlinear Effects in Poiseuille Problem. – Jour. of Siberian Federal Univ. Math.&Phys., 6(3), P. 308-314.
6. *Koptev A.V.* Generator of Solutions for 2D Navier – Stokes Equations. – Jour. of Siberian Federal Univ. Math.&Phys., 7(3), P. 324-330.

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ЧИСЛЕННЫХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ ИДЕНТИФИКАЦИИ ПАРАМЕТРОВ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А.А. Костоготов, **И.В. Дерябкин**, О.Н. Манаенкова

*ФГБОУ ВПО «Ростовский государственный университет путей сообщения»,
kostogotov@me.com@mail.ru, science@ocns.ru, manaenkova_o@mail.ru*

Задача идентификации в настоящее время стоит в ряду основных проблем системного анализа и его приложений. Непрерывный рост сложности математических динамических моделей в совокупности с увеличением требований к точности их описания делает ее неотъемлемой частью процесса проектирования современных систем различного назначения. Задача идентификации относится к классу обратных и ее решение строится по результатам наблюдения, что делает ее некорректной, а это в свою очередь приводит к известным проблемам обеспечения однозначности и устойчивости. Другой отличительной чертой является особенность, связанная с нелинейностью алгоритмов идентификации, получаемых в результате процедуры расширения пространства состояний системы даже в случае, когда исходная система линейна.

Ряд результатов [1 – 5] решения различных обратных задач, полученных на основе теории объединенного принципа максимума, характеризуются высокой скоростью сходимости и точностью при минимуме вычислительных затрат. Однако полученные результаты не дают ответа на вопрос о границах области применимости и особенностях предлагаемого подхода в условиях действия помех различного уровня, что весьма важно при использовании метода в прикладных областях. Ввиду нелинейности процесса идентификации анализ оценки помехоустойчивости предлагаемого метода аналитическими методами

провести весьма сложно, что вызывает объективную необходимость использования математического моделирования.

Задача исследования – определения границ эффективного практического применения метода вариационной идентификации в условиях помех наблюдения в нелинейных динамических системах.

Работа поддержана грантом РФФИ № 18-01-00385 А.

Список литературы:

1. *Андрашитов Д.С., Дерябкин И.В., Костоглотов А.А., Лазаренко С.В.* Анализ функционирования алгоритмов параметрической идентификации информационно–управляющих систем, удовлетворяющих принципу Гамильтона-Остроградского // Динамика сложных систем – XXI век, №2, т.8 Изд. Радиотехника, 2014. С.90-95.
2. *Андрашитов Д.С., Дерябкин И.В., Костоглотов А.А., Кузнецов А.А., Лазаренко С.В.* Синтез алгоритма автономного управления математическим маятником на основе объединенного принципа максимума // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Технические науки. 2010. № 3(155). С.9-15.
3. *Андрашитов Д.С., Дерябкин И.В., Костоглотов А.А., Лазаренко С.В.* Вариационный метод многопараметрической идентификации динамических систем на основе итерационной регуляризации // Изд-во «Радиотехника», Успехи современной радиоэлектроники № 6, 2012. С.67-72.
4. *Дерябкин И.В., Костоглотов А.А., Костоглотова О.А.* Анализ влияния шума наблюдения на качество функционирования вариационного алгоритма параметрической идентификации динамических систем // Тезисы докладов XX Всероссийской конференции и Молодежной школы-конференции «Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики», посвященная памяти К.И. Бабенко. (Дюрсо 15 - 20 сентября, 2014). – М: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша, 2014. С.56-57.
5. *Костоглотов А.А.* Метод идентификации параметров голономных систем на основе аппарата асинхронного варьирования // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2003 г. № 2. С.86-92.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТАПРОГРАММИРОВАНИЯ ШАБЛОНОВ ЯЗЫКА C++ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

М.М. Краснов

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, ktm@iam.ru

Под метапрограммированием в языке C++ подразумеваются вычисления на стадии компиляции. Основным инструментом для этого являются шаблоны

классов, называемые в этом случае (в случае их использования для вычислений на стадии компиляции) метафункциями. Параметрами таких метафункций служат параметры шаблонов классов, а значения метафункций (их может быть несколько) хранятся в статических (static) переменных или определениях типов (typedef-ах) класса. Язык C++ накладывает определённые ограничения на то, что может быть передано в качестве параметров шаблонов, и на типы статических переменных, значения которых могут быть вычислены на стадии компиляции. Это могут быть константы целочисленных типов и произвольные типы (как встроенные в язык простые типы, так и классы). В частности, нельзя передавать в качестве параметров шаблонов и вычислять на стадии компиляции константы вещественных типов, а также шаблоны классов.

При подстановке значений параметров в шаблон класса получается класс. При этом для разных наборов значений параметров компилятор создаёт разные классы. Кроме того, для некоторых конкретных значений параметров можно создавать «особые» классы, имеющие другую реализацию, чем общий шаблон класса. Такие «особые» классы называются специализациями классов. Специализации классов могут быть частичными (когда конкретные значения указываются для части параметров) или полными (когда конкретные значения указываются для всех параметров). Под полным шаблоном класса подразумевается совокупность основного определения шаблона класса и всех его специализаций. В частности, специализации классов используются для организации рекурсивных циклов. В рекурсивных функциях важно вовремя завершить рекурсию, в метапрограммировании для этого как раз и служат специализации классов для предельных значений параметров шаблонов.

Шаблоны (классов и функций) – один из самых сложных элементов языка C++. Они появились в языке не сразу и первоначально были задуманы для того, чтобы можно было писать универсальные коллекции (которые могут хранить значения произвольных типов) и алгоритмы (например, алгоритм сортировки набора объектов произвольного типа). Метапрограммирование – другое, не менее важное применение шаблонов. С его помощью можно вынести часть вычислений на стадию компиляции и, таким образом, ускорить (иногда существенно) выполнение программ, что бывает особенно важно при численном решении задач математической физики, которые могут считаться весьма долго. Кроме того, применения метапрограммирования шаблонов может упростить решение некоторых логически сложных задач и уменьшить вероятность ошибок в программах, связанных с невнимательностью. Такие ошибки часто бывает очень трудно найти. В качестве примеров таких задач можно привести автоматическое раскрытие скобок в сложных выражениях и символьное дифференцирование произвольных выражений.

Несколько слов по поводу графических ускорителей CUDA (см. [6]). Как уже говорилось выше, компилятор для CUDA поддерживает шаблоны, и никаких проблем с использованием метапрограммирования нет. Более того, начиная с версии 7.0 компилятор nvcc поддерживает стандарт языка C++11. Но это не сильно помогает, так как для переноса программы на CUDA её всё равно

нужно сильно переписать. Так можно ли написать программу один раз так, чтобы компилировать и запускать её можно было в том числе и на CUDA? Существует несколько решений этой задачи, один из них – стандарт OpenACC. Этот подход аналогичен OpenMP, т.е. решение заключается в автоматическом распараллеливании витков цикла. Применительно к OpenACC это означает, что исходные данные будут скопированы на CUDA, там параллельно обработаны, а затем результаты будут скопированы обратно в главный (host) процессор. Такой подход не представляется оптимальным. Автором предлагается альтернативный, т.н. «сеточно-операторный» подход к программированию, в котором при работе с CUDA данные изначально расположены в памяти CUDA, и копирование «туда-сюда» не требуется. Исходные данные при необходимости копируются в память CUDA в начале работы программы, а в конце работы копируются обратно в главный процессор. Сеточно-операторный подход к программированию также основывается на шаблонном метапрограммировании.

Список литературы:

1. *Bjarne Stroustrup*. The C++ Programming Language, Fourth Edition. Addison-Wesley, 2013. ISBN 978-0-321-56384-2, 1368 с.
2. *Bjarne Stroustrup*. The C++ Programming Language, Fourth Edition. Addison-Wesley, 2013. ISBN 978-0-321-56384-2, 1368 с.
3. *Бьерн Страуструп*. Программирование: Принципы и практика с использованием C++, второе издание. пер. с англ., Вильямс, 2016, 1328 с.
ISBN 978-5-8459-1949-6, 978-0-321-99278-9.
4. *Бьерн Страуструп*. Дизайн и эволюция языка C++. ДМК Пресс, 2016, 446 с.
ISBN 978-5-97060-419-9, 978-0-201-54330-8.
5. *David Abrahams, Aleksey Gurtovoy*. C++ Template Metaprogramming. Addison-Wesley, 2004, 400 с. ISBN 978-0-321-22725-6.
6. *T. Veldhuizen*. Expression Templates. C++ Report, Vol. 7 No. 5 June 1995, pp. 26-31.
7. *Краснов М.М.* Операторная библиотека для решения трёхмерных сеточных задач математической физики с использованием графических плат с архитектурой CUDA. // Математическое моделирование, 2015, т. 27, с. № 3, 109-120.
8. *Краснов М.М.* Сеточно-операторный подход к программированию задач математической физики. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. М., 2017.
URL: <http://keldysh.ru/council/1/2017-krasnov/diss.pdf>
9. *Краснов М.М., Ладонкина М.Е.* Разрывный метод Галёркина на трёхмерных тетраэдральных сетках. Применение шаблонного метапрограммирования языка C++. // Программирование, 2017 г., № 3, с. 56-68.

10. *Краснов М.М.* Применение символьного дифференцирования для решения ряда вычислительных задач // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2017. № 4. 24 с. doi: 10.20948/prepr-2017-4
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-4>
11. *Краснов М.М.* Метапрограммирование шаблонов C++ в задачах математической физики. М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2017. 84 с.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ НЕБЕСНЫХ ТЕЛ В АТМОСФЕРЕ ЗЕМЛИ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАФИЧЕСКИХ УСКОРИТЕЛЕЙ

М.А. Кривов

МГУ им. М.В. Ломоносова, m_krivov@cs.msu.su

Одной из фундаментальных проблем планетных исследований является описание процессов, происходящих при движении космических тел в атмосфере Земли. По графической информации с фоторегистраторов необходимо воспроизвести весь процесс движения и разрушения тела, начиная от момента его входа в атмосферу и до окончательного распада болида. Проведение подобных исследований, в частности, требуется для определения ожидаемого места падения метеорита с целью поиска и сбора его частей.

В докладе будет рассмотрен ключевой этап этой задачи — определение скорости $V(t)$, высоты над поверхностью $h(t)$ и массы тела $M(t)$. Рассматриваемый метод основан на поиске решения системы ОДУ, предложенной В.П. Стуловым и др. [1] для описания движения небесного тела в атмосфере. Особенностью решаемой задачи является отсутствие начального условия $M(t=0)$ и точных значений ряда параметров, которые уникальны для каждого болида (например, объемная плотность тела и темп уноса массы). При этом имеются значения $V(t)$ и $h(t)$ для светящегося участка пути $t \in \{0, T_1, \dots, T_n\}$, которые восстанавливаются по снимкам с фоторегистраторов.

В схожих работах [2] применяются существенные упрощения, благодаря которым удаётся построить автомодельное решение. В отличие от них, представляемый подход основан на численном решении набора исходных систем уравнений, полученных путём подстановки наиболее вероятных значений для неизвестных параметров. Среди решений отбираются варианты, которые по норме L^2 наиболее соответствуют имеющимся функциям $V(t)$ и $h(t)$, что позволяет оценить параметры небесного тела (массу, форму и состав).

В силу необходимости численного решения десятков тысяч практически идентичных систем ОДУ, программная реализация была адаптирована для выполнения на графических сопроцессорах. Представленные в докладе результаты были получены с использованием ускорителя NVIDIA Tesla K40.

Работа поддержана грантом РФФИ № 18-37-00429 мол_a.

Список литературы:

1. Стулов В.П., Мирский В.Н., Вислый А.И. Аэродинамика болидов. – М.: Наука, 1995, 236 с.
2. Gritsevich M. et al. A comprehensive study of distribution laws for the fragments of Košice meteorite // Meteoritics & planetary science. 2014. vol. 49(3), pp. 328–345.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОЛИМЕРНЫХ МИКРОТРУБОЧЕК С ПЛЕЧАМИ ХРОМОСОМЫ

М.А. Кривов¹, Ф.И. Атауллаханов², П.С. Иванов¹

¹МГУ им. М.В. Ломоносова, m_krivov@cs.msu.su, psmart@rambler.ru

²ЦТП ФХФ РАН, ataullakhanov.fazly@gmail.com

Одной из ключевых стадий деления биологических клеток является метафаза. В рамках данного этапа, продолжающегося несколько часов, спаренные хромосомы из хаотического состояния переходят в упорядоченное, в частности, располагаясь строго в экваториальной плоскости клетки. На настоящий момент рассматриваемый процесс хорошо изучен с описательной точки зрения [1], однако отсутствует фундаментальное понимание, какие именно биологические механизмы обеспечивают столь стабильное поведение.

Основную роль в центрировании хромосом играют полимерные микротрубочки, растущие из диаметрально противоположных полюсов деления. Они зацепляются за кинетохор (белковая структура, расположенная в центральной части хромосомы), после чего начинают притягивать сцепленную пару к соответствующему полюсу. Однако, как показало проведённое авторами моделирование, данные силы недостаточны для перехода клетки в ожидаемое равновесное состояние, поэтому была предпринята попытка расширить математическую модель за счёт добавления взаимодействий между микротрубочками и боковыми частями хромосомы (плечами). Известно, что расположенные на них белки хромокинезина также взаимодействуют с микротрубочками, развивая дополнительную, но уже отталкивающую силу [2].

В докладе будет рассмотрена предложенная комплексная математическая модель делящейся клетки, описывающая стадии прометафазы и метафазы. Представлены детали её численной реализации в виде конфигурируемого пакета для проверки различных гипотез о природе митоза. Приведены оценки влияния отдельных параметров модели, определяющих взаимодействие микротрубочек с кинетохором и плечами хромосомы, на процесс центрирования хромосом. Представляемые результаты были получены путём сбора статистики на группах из 500 виртуальных клеток. В силу большого объёма вычислений, расчёты производились на кластере «Ломоносов».

Работа поддержана грантом РФФИ № 16-07-01064а.

Работа выполнена с использованием оборудования ЦКП «Суперкомпьютерный комплекс» МГУ имени М.В. Ломоносова.

Список литературы:

1. *Alberts B.* Molecular Biology of the Cell – Garland Science, 2002.
2. *Campas O., Sens P.* Chromosome Oscillations in Mitosis // Physical Review Letters. 2006. Vol. 97(12). pp.128102-1 – 128102-4.

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА НА РЕШЕНИЯХ СОДЕРЖАЩИХ РАЗРЫВ

Ю.А. Криксин, П.А. Кучугов, М.Е. Ладонкина,
О.А. Неклюдова, **В.Ф. Тишкин**

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, v.f.tishkin@mail.ru

В настоящее время, для решения широкого класса прикладных задач математической физики часто используется метод Галеркина с разрывными базисными функциями или Discontinuous Galerkin Method [1]. Данный метод обладает рядом достоинств, присущих как конечно-элементным, так и конечно-разностным аппроксимациям. В частности, он обеспечивает заданный порядок точности на гладких решениях, может использоваться для сеток произвольной структуры. Это особенно актуально для решения с повышенной точностью сложных разномасштабных физических задач.

Однако отдельный интерес представляет поведение численных решений в областях содержащих сильные и слабые разрывы, особенно исследование точности расчетных методик на модельных задачах, в которых разрывы распространяются по неоднородному фону.

В данной работе исследуется реальная точность разрывного метода Галеркина при расчете по нему разрывных решений квазилинейных гиперболических систем законов сохранения с ударными волнами, распространяющимися с переменной скоростью. На примере системы законов сохранения теории мелкой воды показано, что подобно TVD- и WENO-схемам повышенного порядка аппроксимации на гладких решениях[2,3], разрывный метод Галеркина, не смотря на высокую точность на гладких решениях, при использовании лимитера снижает свой порядок сходимости до первого в областях влияния ударных волн.

Работа поддержана грантами РФФИ № 17-01-00361, № 16-01-00333

Список литературы:

1. *Cockburn B.* An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection - Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of

Nonlinear Hyperbolic Equations, Lecture Notes in Mathematics, – 1998 – P. 151-268.

2. *Ковыркина О.А., Остапенко В.В.* О реальной точности разностных схем сквозного счета // Матем. моделир., 2013. Т. 25. № 9. С. 63–74.
3. *Михайлов Н.А.* О порядке сходимости разностных схем WENO за фронтом ударной волны // Матем. моделир., 2015. Т. 27. № 2. С. 129–138.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИН В ТРЕХМЕРНЫХ ТЕРМОУПРУГИХ ОБРАЗЦАХ

А.Ю. Кутищева^{1,2}

¹*Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А.Трофимука Сибирского отделения Российской академии наук (ИНГГ СО РАН), Kutischeva.Anastasia@yandex.ru*

²*Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования Новосибирский государственный технический университет (НГТУ)*

Моделирование разрушающей деформации сред с различными термомеханическими свойствами является важным этапом разработки композиционных материалов и исследования естественных сред, например, горных пород. Такие среды, как правило, являются существенно трехмерными и редукция модели до одно- или двумерной не допустима. Поэтому для численного моделирования термоупругой деформации и последующего прогнозирования развития трещин используется расширенный метод конечных элементов (extended finite element method, XFEM), который позволяет решать нестационарные или квазистационарные задачи математической физики в областях с подвижными внутренними границами без дополнительных перестроений конечноэлементной сетки. Это возможно благодаря разделению пространства решений на сумму нескольких подпространств, одно из которых отвечает за учет эффективных свойств области моделирования и влияния внешних сил на напряженно-деформированное состояние, другое подпространство позволяет учесть разрывность и сингулярность решения вблизи трещины. Таким образом, трещины и иные внутренние дефекты области моделирования (каверны, поры и др.) учитываются не на сеточном уровне, а при построении дополнительного функционального подпространства, являющегося линейной оболочкой неполиномиальных функций форм специального вида. Несмотря на явное преимущество использования XFEM для решения задач разрушающей деформации, технологические аспекты применения данного метода являются разработанными не в полной мере.

В данной работе решается трехмерная квазистационарная задача разрушающей термоупругой деформации твердого трещиноватого тела при

условии внешнего нагружения. Рассматриваются особенности проектирования и реализации расширенного метода конечных элементов на тетраэдральных носителях для сред с криволинейными трещинами.

ЛОКАЛЬНЫЙ РЕЖИМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ДЛЯ ГАУССОВСКИХ УНИТАРНЫХ МАТРИЧНЫХ АНСАМБЛЕЙ

М.А. Лапик, Д.Н. Туляков

*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
mashalapik@gmail.com, dntulyakov@gmail.com*

Пусть H_n - пространство эрмитовых матриц M размера $n \times n$ с вероятностной мерой

$$dP_n(M) = \frac{1}{Z_n} e^{-n \operatorname{Tr} M^2} dM = \frac{1}{Z_n} e^{-n \operatorname{Tr} M^2} \prod_{k=1}^n dM_{kk} \prod_{k=1}^{n-1} \prod_{l=k+1}^n d\operatorname{Re}(M_{kl}) d\operatorname{Im}(M_{kl}),$$

где Z_n есть нормировочная константа. Ансамбль случайных матриц с так определенной мерой называют гауссовским унитарным ансамблем (ГУА). Такая мера инвариантна относительно унитарных преобразований и зависит только от собственных значений. Эту формулу можно переписать в детерминантной форме с ядром Кристоффеля–Дарбу. Для плотности ρ меры P_n имеем:

$$\rho(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \frac{1}{Z'_n} \Delta^2(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \prod_{j=1}^n e^{-n\lambda_j^2} = \frac{1}{Z''_n} \det(K_n(\lambda_k, \lambda_l)).$$

Ядро Кристоффеля–Дарбу для многочленов Эрмита, сжатых в \sqrt{n} , раз определяется следующей формулой:

$$\begin{aligned} K_n(x, y) &= e^{-\frac{n}{2}(x^2+y^2)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sqrt{n}}{2^k k! \sqrt{\pi}} H_k(x\sqrt{n}) H_k(y\sqrt{n}) = \\ &= e^{-\frac{n}{2}(x^2+y^2)} \frac{H_{n+1}(x\sqrt{n})H_n(y\sqrt{n}) - H_n(x\sqrt{n})H_{n+1}(y\sqrt{n})}{2^{n+1} n! (x-y)\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

Известна классическая теорема универсальности. Сформулируем ее для ГУА.

ТЕОРЕМА 1. Для любого $\lambda^* \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ и компакта $K \subset \mathbb{R}$ при $n \rightarrow \infty$ верно

$$\sup_{x, y \in K} \left| \frac{\pi}{n\sqrt{2 - \lambda^*}} K_n \left(\lambda^* + \frac{\pi x}{n\sqrt{2 - \lambda^*}}, \lambda^* + \frac{\pi y}{n\sqrt{2 - \lambda^*}} \right) - \frac{\sin(\pi(x-y))}{\pi(x-y)} \right| = o(1).$$

Мы улучшили этот классический результат, показав, что можно рассматривать компакты зависящие от n . Найдены точная оценка скорости роста этих компактов, которая зависит от λ^* , и переходный режим.

ТЕОРЕМА 2. Фиксируем $\lambda^* \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ выполнены пп. 1)-3):

1) Для $\lambda^* = 0$ и $m(n) = o(n^{2/3})$ существует последовательность k_n такая, что

$$\sup_{x,y \in [-m(n), m(n)]} \left| \frac{\pi}{n\sqrt{2 - \lambda^*}} K_n \left(\lambda^* + \frac{x}{nk_n}, \lambda^* + \frac{y}{nk_n} \right) - \frac{\sin(\pi(x-y))}{\pi(x-y)} \right| = o(1). \quad 1)$$

Более того, если $m(n_k) > C_1 n_k^{2/3}$ для некоторой строго возрастающей натуральной последовательности и константы C_1 , то (1) не имеет места ни для какой последовательности k_n .

2) Для $\lambda^* \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $\lambda^* \neq 0$ и $m(n) = o(n^{1/2})$ существует последовательность k_n такая, что выполняется (1). Если $m(n_k) > C_2 n_k^{1/2}$ для некоторой строго возрастающей натуральной последовательности и константы C_2 , то (1) не имеет места ни для какой последовательности k_n .

3) Пусть $\lambda^* = o(n^{-1/3})$, тогда существует последовательность k_n такая, что выполняется (1) для $m(n) = o(n^{2/3})$. Пусть $|\lambda^*| > C n^{-1/3}$, $C > 0$, тогда (1) выполняется для $m(n) = o\left(\left(\frac{n}{\lambda^*}\right)^{1/2}\right)$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 17-01-00614).

Список литературы:

1. Лапик М.А., Туляков Д.Н. О расширяющихся окрестностях локальной универсальности гауссовских унитарных ансамблей // Труды МИАН 2018. Т. 301.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ВРЕМЕННЫХ СОЛИТОНОВ

В.С. Лапонин, Н.П. Савенкова

МГУ имени М.В. Ломоносова, факультет ВМК, lap@cs.msu.ru

Существование временных солитонов в световодах и их использование для оптической связи было предложено в 1973 году [1]. В 1980 году временные солитоны наблюдались в экспериментах [2]. Временные солитоны формируются внутри волоконного световода вследствие баланса дисперсии групповой скорости и фазовой самомодуляции, которая вызвана керровской нелинейностью [3].

Нелинейное уравнение Шредингера, которое описывает распространение импульса внутри световода, имеет вид: $i \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} + |u|^2 u = 0$. Физический смысл τ – это время, отсчитываемое от центра импульса и нормированное на длительность входного импульса. Основное отличие от пространственных

солитонов в том, что нелинейный член имеет простой вид, соответствующий керровской среде. Временные солитоны способны поддерживать свою длительность даже в световоде с дисперсией.

Детализирование эффектов взаимодействия временных солитонов требует проведение математического моделирования физических экспериментов [1-3]. При этом возникает проблема развития эффективных численных методов решения нелинейных дифференциальных уравнений [4-6]. Благодаря эффективному численному методу, представленному в работе [6], производится численное исследование эволюции временных солитонов и сравнение полученных численных результатов с аналитическим решением.

Список литературы:

1. Hasegawa A., Tappet F. // *Appl. Phys. Lett.* 1973. V. 23. P. 142.
2. Mollenauer L.F., Stolen R.H., Gordon J.P. // *Phys. Rev. Lett.* 1980. V. 45. P. 1095.
3. Mollenauer L.F., Smith K. // *Opt. Lett.* 1988. V. 13. P. 675.
4. Bychkov V.L., Savenkova N.P., Anpilov S.V., Troshchiev Yu.V. Modeling of vorticle objects created in gatchina discharge // *IEEE Transactions on Plasma Science*, 2012, V. 40(12), P. 3158–3161.
5. Yusupaliev U., Savenkova N.P., Troshchiev Yu.V., Shuteev S.A., Skladchikov S.A., Vinke E.E., Gusein-zade N.G. Vortex rings and plasma toroidal vortices in homogeneous unbounded media. II. The study of vortex formation process // *Bulletin of the Lebedev Physics Institute*, 2011, V. 38, P. 275-282.
6. Laponin V. S. Numerical investigation of spatial solitons // *Computational Mathematics and Modeling*, 2016, Vol. 27, no. 2, P. 181–189.

ЛОКАЛЬНО-РЕКУРСИВНЫЕ НЕЛОКАЛЬНО-АСИНХРОННЫЕ АЛГОРИТМЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

В.Д. Левченко

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, lev@keldysh.ru

Бурное развитие вычислительной техники, характеризующееся уже полвека экспоненциальным ростом доступной производительности, открывает новые возможности в постановке и решении задач численного моделирования динамики физических сред и сложных систем, традиционно требовательных к вычислительным ресурсам. На данный момент актуальны трехмерные, многомасштабные по пространству и времени постановки задач, что требует высокого пространственного разрешения, и как следствие обновления большого массива данных (big data) в течение большого числа итераций по времени.

Традиционные алгоритмы решения таких задач, в том числе параллельные (методы декомпозиции области), требуют полного обновления

массива данных на каждой итерации по времени, с последующей синхронизацией параллельных вычислителей. При этом, поскольку рост пропускной способности подсистемы основной памяти (ПСП) отстает от вычислительной производительности, всё больше и больше реализаций численных методов становятся ограничены ПСП (memory-bound problem).

Указанная проблема получила название «стена локальности» [1]. Для каждой задачи, характеризующейся численным методом и алгоритмом реализации, может быть определён параметр локальности (вычислительная интенсивность). Нанесённый на модель покато́й крыши (RoofLine), которая может быть построена для каждой вычислительной системы, данный параметр определяет предел (ограничение) производительности.

Развиваемый в ИПМ им. Келдыша локально-рекурсивный нелокально-асинхронный (LRnLA) метод [2] позволяет, повысив локальность, преодолеть данный предел за счет отказа от алгоритмов пошаговой синхронизации в пользу алгоритмов, основанных на разбиении пространственно-временной области задачи. LRnLA алгоритмы разработаны и реализованы для ряда численных схем и компьютеров, и успешно применены в задачах электродинамики, акустики и сеймики [3], физики плазмы и газодинамики, спинтроники и других.

Список литературы:

1. *Williams S., Waterman A., Patterson D.* Roofline: an insightful visual performance model for multicore architectures // *Communications of the ACM*. 2009. V.52 (4). P.65-76.
2. *Левченко В.Д.* Асинхронные параллельные алгоритмы как способ достижения эффективности вычислений // *Информационные технологии и вычислительные системы*. 2005. №1. С.68-87.
3. *Закиров А.В., Левченко В.Д. и др.* Высокопроизводительное 3D моделирование полномасштабного сейсмического поля для задач сейсморазведки // *Геоинформатика*. 2017. №3. С.34-45.

РАСЧЕТ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ НА ЛОКАЛЬНО АДАПТИВНЫХ СЕТКАХ

А.Е. Луцкий, Я.В. Ханхасаева

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

Рассматривается подход [1] к расчету сложных газодинамических течений, основанный на сочетании метода вложенных и локальной адаптации декартовых сеток. Задача в начальный момент времени рассматривается на фиксированной сетке нулевого уровня состоящей из мерных кубов, в которых затем строятся подразбиения (локально адаптивные сетки) зависящие от времени. В ходе расчета каждая ячейка характеризуется флагом,

показывающим, является ли данная ячейка расчетной и конечной (т.е. такой, которая участвует в работе упомянутого выше солвера) или подразбитой на ячейки следующего уровня. Для подразбитой ячейки присутствуют указатели на потомков данной ячейки. Для конечной ячейки эти указатели пустые, но зато есть указатель на массив, описывающий реальную физическую ячейку. В нем содержатся координаты ячейки и вектор газодинамических параметров внутри нее. В случае, если ячейка подразбита этот указатель - нулевой. Для автоматического локального измельчения и укрупнения сетки в соответствии с локальными свойствами течения используется сеточный анализатор на основе вычислений коэффициентов разложений по локальному вейвлетному базису, построенному по В-сплайнам.

Возможности рассматриваемого подхода исследуются на примере задачи сверхзвукового обтекания затупленных объектов при выбросе малых тел (пеллетов) навстречу потоку. Изначально пеллеты и системы их разгона использовались в ядерной физике и энергетике. Пеллеты представляют собой твердые тела миллиметровых размеров из замороженных изотопов водорода и используются для доставки топлива в зону термоядерных реакций, для диагностики горячей плазмы, для управления режимами работы реактора и т.д.

Однако, существуют интересные применения выстреливания пеллетов и в аэродинамике. Так, если систему разгона (например, рельсотрон) установить в летательный аппарат и выстреливать пеллеты навстречу потоку, то можно добиться значительного снижения сопротивления ЛА. Данный эффект связан с формированием за пеллетом узкого следа, характеризующегося пониженными значениями полного давления и чисел Маха, что существенно влияет на структуру течения. При сверхзвуковых скоростях за дном тела образуется сложное спутное течение. Особенности спутного течения оказывают существенное влияние на структуру потока между двумя последовательно расположенными телами и, следовательно, на характер обтекания и аэродинамические характеристики [2-4]. Для неподвижных тел и тел, движущихся с малой относительно друг друга скоростью, задача обтекания относительно хорошо изучена и ей посвящен ряд работ, как численного, так и экспериментального характера.

В настоящей работе проведено численное моделирование обтекания сферически затупленного цилиндра с пеллетом, вылетающим из него со скоростью $M=4$. Нестационарное течение в этой задаче является весьма сложным. В его эволюции можно выделить несколько характерных стадий. Когда пеллет находится в зоне между головной ударной волной и затупленным цилиндром в дозвуковой области, то его влияние на сопротивление незначительно. Далее происходит взаимодействие пеллета с головной ударной волной и формирование области возвратного течения. В течение некоторого времени оба тела с областью возвратного течения между ними обтекаются сверхзвуковым потоком практически как одно целое, после чего зона рециркуляции распадается на две, за пеллетом и перед цилиндром. С этого момента сопротивление цилиндра возрастает, до наступления момента, когда

сложная система скачков и зона рециркуляции не вытесняют зону повышенного давления с передней части цилиндра, после чего сопротивление падает до 70% от изначального. В дальнейшем между пеллетом и цилиндром возникает сложная структура течения с многочисленными вихрями и лямбда-конфигурациями скачков уплотнения.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 17-71-30014.

Список литературы:

1. *Pavlukhin P., Menshov I.* (2017) Parallel Algorithms for an Implicit CFD Solver on Tree-Based Grids. In: Malyshkin V. (eds) Parallel Computing Technologies. PaCT 2017. Lecture Notes in Computer Science, vol 10421. Springer, Cham.
2. *В.С. Хлебников.* Картина сверхзвукового обтекания пары тел и перестройка течения между ними // Механика жидкости и газа, 1994, №1. Издательство РАН, Москва.
3. *Л.Г. Васенев, Д.А. Внучков, В.И. Звезинцев, С.В. Лукашевич, А.Н. Шиплюк.* Измерение сопротивления двух последовательно расположенных тел вращения при их разделении в сверхзвуковом потоке // Перспективные технологии самолетостроения в России и в мире: труды IV-й Всероссийской научно-практической конференции молодых специалистов и ученых (Новосибирск, 22-24 мая 2012 г.), СибНИА. Новосибирск, 2012. С. 19-24.
4. *A.L. Afendikov, Ya.V. Khankhasaeva, A.E. Lusky, I.S. Menshov, K.D. Merkulov.* “Computation and visualization of flows past bodies in mutual motion” // Scientific Visualization, 2016, Т.8. № 4. С. 128-138. (URL: <http://sv-journal.org/2016-4/10.php?lang=ru>)

АСИМПТОТИКА АППРОКСИМАЦИЙ ЭРМИТА–ПАДЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С ТРЕМЯ ТОЧКАМИ ВЕТВЛЕНИЯ

В.Г. Лысов

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, vlysov@mail.ru

Пусть A — конечное множество на комплексной плоскости. Пусть A_A — множество аналитических ростков в бесконечности $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^{-k}$, которые допускают аналитическое продолжение вдоль всех путей из $\mathbb{C} \setminus A$. Будем предполагать, что множество точек ветвления $B(f)$ ростка $f \in A_A$ непусто, т.е. $\emptyset \neq B(f) \subset A$.

Для конечного набора (f_1, \dots, f_r) ростков из A_A рассмотрим рациональные аппроксимации Эрмита–Паде с общим знаменателем $\left(\frac{P_{n,1}}{Q_n}, \dots, \frac{P_{n,r}}{Q_n}\right)$:

$$\deg Q_n \leq rn, \dots, f_j Q_n - P_{n,j} = O(z^{-n-1}), \dots, z \rightarrow \infty.$$

В работе [1] Дж. Наттолл высказал ряд гипотез относительно областей сходимости этих аппроксимаций и описания предельного распределения их полюсов. Мы исследуем эти вопросы для двух частных конструкций, в каждой из которых множество A состоит из трех точек: $A := \{a_0, a_1, a_2\}$.

Первая конструкция была введена в работе [2], где изучались аппроксимации Эрмита–Паде для пары функций (f_1, f_2) :

$$f_j(z) := \int_{a_0}^{a_j} \frac{w(\zeta) d\zeta}{z - \zeta}, \dots, w(\zeta) := (\zeta - a_0)^{\alpha_0} (\zeta - a_1)^{\alpha_1} (\zeta - a_2)^{\alpha_2}, \dots, \alpha_j > -1.$$

В работе [2] изучался частный случай $A = \{-1, 0, 1\}$. Случай произвольного трехточечного множества A является следствием результатов работы [3].

Вторая конструкция возникла в [4] в связи с исследованием арифметических свойств числа π . Она состоит в аппроксимациях тройки функций (f_{01}, f_{02}, f_{12}) :

$$f_{jk}(z) := \int_{a_j}^{a_k} \frac{w_{jk}(\zeta) d\zeta}{z - \zeta}, \dots, w_{jk}(\zeta) := w(\zeta) (\zeta - a_j)^n (\zeta - a_k)^n.$$

Для каждого из этих наборов мы опишем кривые, притягивающие полюса аппроксимаций, исследуем зависимость топологических свойств этих кривых от множества A . Важную роль в нашем описании играет специальная векторная задача равновесия логарифмического потенциала (см. [5, 6]), кривые со свойством симметрии (S-свойством) и критические траектории квадратичных дифференциалов на алгебраических кривых.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 17-01-00614).

Список литературы:

1. *Nuttall J.* Asymptotics of diagonal Hermite–Padé polynomials. // *J. Approx. Theory* 42 (1984), no. 4, 299–386.
2. *Калягин В.А.* Об одном классе полиномов, определяемых двумя соотношениями ортогональности. // *Матем. сб.*, 110(152):4(12) (1979), 609–627.
3. *Aptekarev A. I, Van Assche W., Yattselev M. L.* Hermite–Padé approximants for a pair of Cauchy transforms with overlapping symmetric supports. // *Comm. Pure Appl. Math.* 70 (2017), no. 3, 444–510.
4. *Hata M.* Rational approximations to π and some other numbers. // *Acta Arith.* 63, no. 4, 335–349 (1993).

5. *Аптекарев А.И.* Асимптотика аппроксимаций Эрмита–Паде для пары функций с точками ветвления. // Докл. РАН, 422:4 (2008), 443–445.
6. *Аптекарев А.И., Лысов В.Г.* Системы марковских функций, генерируемые графами, и асимптотика их аппроксимаций Эрмита–Паде. // Матем. сб., 201:2 (2010), 29–78.

МОДЕЛИРОВАНИЕ НАГРЕВА ДЕФОРМИРОВАННОЙ ПЛАСТИНЫ ВОЛЬФРАМА ПРИ ИМПУЛЬСНОЙ ТЕПЛОВОЙ НАГРУЗКЕ

А.Г. Максимова¹, Г.Г. Лазарева¹, А.С. Аракчеев²

¹*Институт вычислительной математики и математической геофизики
Сибирского отделения РАН (ИВМиМГ СО РАН), maksimova@oapmg.sccc.ru,
lazareva@ssd.sccc.ru*

²*Институт ядерной физики им. Г.И. Будкера Сибирского отделения РАН (ИЯФ
СО РАН), arakcheev@gmail.com*

При изучении импульсной тепловой нагрузки возникает необходимость моделирования процесса нагрева материала и наблюдения за его динамикой. При этом на распределение температуры оказывают влияние деформации в материале. Экспериментально установлено, что из-за теплового расширения образуются не только вертикальные трещины, но и горизонтальные, наличие которых значительно влияет на теплопроводность материала. Поэтому возникает задача по выявлению характерных зависимостей между распределением температуры материала и геометрией трещин.

В работе представлены результаты моделирования двумерной задачи нагрева вольфрама в декартовой и аксиально-симметричной постановках. В модели учитывается плавление и испарение материала. Рассмотрены различные геометрии трещин и изучено их влияние на температуру поверхности. Результаты расчётов соотнесены с экспериментальными данными, полученными в ИЯФ СО РАН на экспериментальном стенде ВЕТА.

Экспериментальные данные и разработка моделей поддержаны Российским научным фондом (проект N17-79-20203). Исследование (вычислительный эксперимент) финансировалось РФФИ в соответствии с исследовательским проектом N18-31-00303.

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ПРЯМЫХ И ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОТОМОГРАФИИ В ГЕОФИЗИКЕ

А.В. Мариненко, М.И. Эпов, В.В. Оленченко

*Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН,
arkadiy@reqip.net, EpovMI@ipgg.sbras.ru, OlenchenkoVV@ipgg.sbras.ru*

Для геофизических исследований методом электротомографии на постоянном токе часто возникает необходимость проведения предварительного численного моделирования. Особенно это актуально в том случае, когда имеется некоторая информация о подвергаемых томографии породах. Например, такая информация есть на геофизических площадках, где проведено бурение скважин. Существующее электротомографическое программное обеспечение позволяет проводить прямое моделирование лишь в простейших случаях и решает прежде всего задачу определения числа и разности между электродами на площадке для успешного обнаружения объекта, залегающего на некоторой глубине. Целью же данной работы является разработка программного комплекса (ПК), который позволит изучить влияние объектов, содержащихся в слое земли и над ним на результирующую картину кажущихся сопротивлений (инверсии), а также методов минимизации этого влияния. Подобная проблема возникает в случае тех же скважин с металлической обсадкой, наличие которых сильно затрудняет решение задачи инверсии [1].

При разработке ПК для решения прямых задач использовался узловый метод конечных элементов на тетраэдрах, который в случае решения задач электротомографии имеет свои особенности, связанные с частой сменой положения источников поля — электродов [2]. Для решения обратных задач применялся подход, описанный в работе [3], который отличается от прочих возможностью использования неструктурированного разбиения в задачах инверсии, что заметно снижает требования к ресурсам компьютера. Поскольку как прямые, так и обратные задачи электротомографии обладают естественным параллелизмом, в ПК были реализованы алгоритмы распараллеливания на центральных и графических процессорах (OpenMP, OpenCL и CUDA).

Список литературы:

1. *Сергеев К.С., Рыжков В.И. и др.* Изучение многолетнемерзлых пород с использованием комплекса методов инженерной геофизики (на примере кустовой площадки нефтегазо-конденсатного месторождения в Западной Сибири) // Журнал «Инженерные изыскания», №10-11/2015, С. 46-53.
2. *Ковбасов К.В.* Численное моделирование трехмерных прямых и обратных задач малоглубинной геоэлектрики на постоянном токе // Диссертация на соискание ученой степени к.ф.-м.н., Новосибирск, 2010, 124 с.

3. *Rucker C. Advanced Electrical Resistivity Modelling and Inversion using Unstructured Discretization // Dissertation, Leipzig, 2011, 121 p.*

ПРОЕКЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

С.И. Марков¹, Н.Б. Иткина²

¹*Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН,
www.sim91@list.ru*

²*Новосибирский государственный технический университет,
itkina.nat@yandex.ru*

Численное решение системы нестационарных уравнений Навье-Стокса осложняется нелинейностью оператора уравнения движения и выраженной сингулярной возмущённостью задачи при исследовании течений с высоким значением критерия Рейнольдса.

Применение чисто неявных схем интегрирования системы уравнения Навье-Стокса является ресурсозатратным, поэтому в работе предлагается использовать полунеявный проекционный метод Chorin-Temam на базе разложения вектора скорости на соленоидальную функцию и градиент скалярной функции согласно теореме Ладыженской.

На первом этапе проекционной процедуры Chorin-Temam диссипативное и конвективное слагаемые интегрируются неявно с помощью неконформного разрывного метода Галёркина, а давление и дивергентное ограничение на втором этапе интегрируются явно в результате естественного физического расщепления.

Приводятся сравнительных анализ решения трёхмерных несжимаемых систем уравнений Навье-Стокса с помощью проекционного метода Chorin-Temam и прямых подходов на базе разрывного метода Галёркина в симметричной и несимметричной постановке и стабилизированного смешанного метода конечных элементов.

Работа выполнена при финансовой поддержке стипендии Президента РФ (СП-3627.2016.5).

МЕТОД СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ АЭРОДИНАМИКИ НА ДЕКАРТОВЫХ ЛОКАЛЬНО-АДАПТИВНЫХ СЕТКАХ

И.С. Меньшов¹, П.В. Павлухин²

¹*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
imen57@mail.ru, menshov@kiam.ru*

²*КВАНТ, giperchuv@mail.ru*

В докладе будет рассмотрен численный метод на основе конечно-объемной аппроксимации для решения нестационарных сжимаемых уравнений Навье-Стокса на декартовых сетках, не согласованных с геометрией расчетной области. Метод можно отнести к классу методов вложенной границы, когда решение задачи ищется в геометрически простой области, не связанной с исходной расчетной областью, а граничные условия твердого тела моделируются так называемыми штрафными функциями, добавляемыми в правую часть исходной системы. В предлагаемом подходе моделирование внутренних граничных условий в пересекаемых ячейках выполняется не штрафными объемными функциями, а с помощью специально выбранных компенсационных потоков, которые определяются локальными параметрами течения, а также подсеточной структурой поверхности твердого тела. В [1] метод был развит для невязкой модели уравнений Эйлера. Граница твердого тела рассматривалась как свободная без привязки к расчетной сетке, и метод получил название «метод свободной границы (МСГ)». В настоящей работе МСГ обобщается на случай вязкой модели уравнений Навье-Стокса. Мы вводим понятие вязкого компенсационного потока, который моделирует вязкое взаимодействие газового потока с поверхностью тела, выводим его дискретный аналог и обсуждаем метод решения уравнений получающейся в результате дискретной модели. Численный алгоритм является однородным: все ячейки, жидкие и пересекаемые, обрабатываются единым образом. Единственное исключение расчета пересекаемой ячейки – это добавление дополнительного компенсационного потока. Расчет этого потока требует минимальной информации о структуре геометрии в пересекаемой ячейке. Мы используем линейное восполнение геометрии, и необходимые данные – это объемная доля и барицентрические координаты отсекаемой жидкой части ячейки и нормаль с площадью отсекаемого элемента геометрии.

Работа поддержана грантом РФФ № 17-71-30014.

Список литературы:

1. *Menshov, I. S. and Pavlukhin, P. V. Efficient Parallel Shock-Capturing Method for Aerodynamics Simulations on Body-Unfitted Cartesian Grids // Computational Mathematics and Mathematical Physics (2016) 56(9): 1651–1664.*

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛНОВЫХ ПОЛЕЙ В СКВАЖИНЕ ПРИ НАЛИЧИИ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ШУМА В ПЛАСТЕ

Н.В. Мутовкин^{1,2}, Д.Н. Михайлов², И.Л. Софронов^{2,1}

¹Московский физико-технический институт, *nmutovkin@slb.com*

²Московский научно-исследовательский центр Шлюмберже, *dmikhailov2@slb.com, ilsofronov@gmail.com*

В настоящее время все больше внимания уделяется исследованиям акустических шумов, возбуждаемых фильтрацией флюида в пористой среде. Анализ спектров данных шумов потенциально позволяет оценить границы потока в пласте, в частности выявить высокопроницаемые пропластки в коллекторе. Спектры фильтрационных шумов в скважине претерпевают искажения, характер которых зависит от геометрии скважины, насыщения коллектора и фазового состава флюида в скважине.

В работе проведен анализ влияния этих эффектов посредством численного моделирования акустических полей в скважине при наличии фильтрационного потока в пласте. Задача рассматривается в двумерной осесимметричной постановке. Модель включает в себя скважину с флюидом и пласт, который может состоять из нескольких пропластков. Фильтрационный шум имитируется объемным источником дипольного типа с амплитудой равномерной по вертикали и спадающей по радиусу как r^{-3} . Моделирование распространения волн в пористой среде выполняется с помощью линейаризованных уравнений модели Био [1] с добавлением источниковых членов, отвечающих за генерацию шума в породе в диапазоне частот от 2 до 20 кГц. Решение задачи происходит по разностной схеме, предложенной в [2].

Численные эксперименты, проведенные для нескольких характерных примеров, позволяют получить пространственно-частотные характеристики шума, которые демонстрируют существенное усиление сигнала в скважине на интервалах частот, соответствующих резонансным модам скважины. В зависимости от геометрии и свойств породы и флюида на данных модах наблюдается либо распространение шума на расстояние, в несколько раз превышающее толщину высокопроницаемого пропластка, либо наоборот – локализация резонансных мод в зоне источника шума. Данный эффект является потенциальной основой для создания новых методик обнаружения и интерпретации шума в пласте.

Список литературы:

1. *Biot M.A. Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range // J. Acoust. Soc. Am. 1956. Vol. 28. №2. Pp. 168-178.*

2. *Plyushchenkov B.D., Turchaninov V.I. Acoustic Logging Modeling by Refined Biot's Equations // Int. J. Mod. Phys. C. 2000. Vol. 11. №2. pp. 365-397.*

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЫХОДА НА СТАЦИОНАРНЫЙ РЕЖИМ ЛАБОРАТОРНОГО ТОРНАДО

А.Г. Обухов, Р.Е. Волков

*Тюменский индустриальный университет, agobukhov@inbox.ru,
email@romanvolkov.ru*

С помощью явных разностных схем и предложенных начально-краевых условий построены приближенные решения полной системы уравнений Навье-Стокса и определены скоростные и энергетические характеристики трехмерных нестационарных течений вязкого сжимаемого теплопроводного газа в восходящих закрученных потоках, которые инициируются вертикальным холодным продувом через трубу большого диаметра.

Сопоставление рассчитанных численных значений геометрических размеров и кинетических энергий [1-3] позволило сделать вывод о том, что энергия вращательного движения, полученная от энергии вращения Земли вокруг своей оси, превосходит половину кинетической энергии всего потока для диаметра вертикальной части потока не менее 5 метров и скорости продува не менее 15 м/с.

Методика распараллеливания алгоритма используется для численного исследования зависимостей энергетических характеристик восходящего закрученного потока воздуха от скорости вертикального продува. В частности, численными экспериментами установлен характер изменения энергетических характеристик формирующегося закрученного потока воздуха при выходе его на стационарный режим, а также при резком скачкообразном уменьшении скорости вертикального продува.

Результаты расчетов имеют принципиальное значение для формулирования конкретных предложений при проведении масштабного натурного эксперимента по созданию восходящего закрученного потока, инициированного вертикальным продувом воздуха через трубу большого диаметра.

Исследования поддержаны Министерством образования и науки РФ (проект №1.4539.2017/8.9).

Список литературы:

1. *Волков Р.Е., Обухов А.Г. Параллельные вычисления в исследованиях зависимости газодинамических параметров восходящего закрученного потока газа от скорости продува // Известия вузов. Нефть и газ. 2016. №1. С.92-97.*

2. Волков Р.Е., Обухов А.Г. Метод распараллеливания алгоритма численного решения полной системы уравнений Навье-Стокса // Известия вузов. Нефть и газ. 2016. №2. С.92-98.
3. Баутин С.П., Дерябин С.Л., Крутова И.Ю., Обухов А.Г. Разрушительные атмосферные вихри и вращение Земли вокруг своей оси. – Екатеринбург: УрГУПС. 2017.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУМЕРНОГО СОГЛАСОВАННОГО РЕШЕНИЯ В.А.СУЧКОВА

А.Ф. Опрышко

СФТИ НИЯУ МИФИ, Krisper1188@gmail.com

Темой данной работы является исследование точного решения В.А. Сучкова [1], полученного для задачи об истечении газа в вакуум с косою стенки, когда наклон косою стенки k_0 связан с показателем адиабаты γ следующим соотношением $k_0 = \sqrt{\gamma + 1/3} - \gamma$. Для основных газодинамических параметров s, u, v представлены формулы в пространстве независимых переменных t, x, y . Построены мгновенные линии тока и представлено движение непроницаемых поверхностей ограничивающих исследуемые потоки газа в конкретный момент времени $t = 10$.

Список литературы:

1. Сучков В.А. Истечение газа на косою стенке // Прикл. Математика и механика. 1963. Т.27 Вып.4. С.739-740.

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ПРОДОЛЖЕНИЯ В МОДЕЛЯХ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ГИДРОТЕРМОДИНАМИКИ

В.В. Пененко

*Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН*

Представлены вариационные принципы со слабыми ограничениями и с использованием концепции сопряженных интегрирующих множителей для организации технологии моделирования исследуемых процессов в областях со сложной внутренней структурой и конфигурацией границ. Конкретно, рассматриваются задачи геофизической гидротермодинамики в системе Земли (атмосфера, водные объекты с прилегающими к ним слоями почвы) при наличии неопределенностей в уравнениях модели и граничных условиях. Теоретическую основу моделей составляют системы уравнений типа

конвекции-диффузии-реакции. Для обратных задач используются доступные данные мониторинга исследуемых процессов в режиме усвоения.

Вариационный принцип с интегрирующими множителями обеспечивает эффективность методов решения прямых, сопряженных и обратных задач. При этом, в режиме декомпозиции и расщепления, действия операторов уравнений основной модели переводятся на действия корректных сопряженных задач в пределах регулярных или нерегулярных конечно-элементных представлений областей. В результате порядок операторов прямой задачи понижается на единицу и обеспечивается корректность алгоритмов решения прямых и обратных задач в целом [1].

Здесь этот подход применяется к одному классу задач, так называемым задачам продолжения. Они возникают, например, при исследовании процессов распространения тепла, влаги и других субстанций в почве. Математически они описываются уравнениями конвекции-диффузии-реакции. Их специфика такова, что имеются два краевых условия и данные наблюдений на верхней вертикальной границе деятельного слоя почвы и отсутствуют условия на его нижней границе. Задачи такого типа при недостатке информации о краевых условиях и источниках мы решаем с помощью последовательных алгоритмов. Они состоят из одновременного (параллельного) расчета сопряженных функций, искомым функций состояния и потоков, а также источников возмущений или функций неопределенностей. Заметим, что при кусочно-постоянных коэффициентах моделей аналитически строятся решения стольких локальных сопряженных задач, сколько объектов подлежит оценке.

Работа выполняется в рамках темы государственного задания ИВМиМГ СО РАН № 0315-2016-0004 и гранта РФФИ №17-01-00137.

Список литературы:

1. *Penenko V.V., Tsvetova E.A., Penenko A.V. Variational approach and Euler's integrating factors for environmental studies// Computers and Mathematics with Applications, 2014, V.67, Issue 12, Pages 2240–2256.*

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕЗКИХ ПЕРЕХОДНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ ПРИ ИНВАЗИИ ЧУЖЕРОДНЫХ ВИДОВ НАСЕКОМЫХ

А.Ю. Переварюха

СПИИРАН, madelf@pisem.net

Случайные или преднамеренные вселения запускают особые инвазионные процессы – комплекс изменений, связанных с формированием новой популяции, утратой сложившегося гомеостаза, трансформацией сложных трофических связей. При их описании, в том числе математическими методами, важно понимать, что интенсивные изменения это переходные режимы существования биологических систем, и они требуют отдельного изучения.

Сведения о ситуациях с самыми разными группами организмов показывают, что вариативность сценариев развития инвазионных процессов велика. В Докладе мы обсудим математические подходы, предложенные в рамках проекта РФФИ, к анализу развития сценариев экстремальных ситуаций при резких изменениях видового разнообразия экосистем – переходные режимы.

Мы предложим новую модель динамики листовертки с запаздывающей регуляцией в модификации модели из [1] уравнении. Явно учтем реакцию хищников, которая зависит от предшествующего состояния жертв:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t - \tau) \exp(-bN(t - \tau)) - q \frac{N(t - 2\tau)}{A - N(t - \tau)} \quad (1)$$

В уравнении показатель b определяет давление ограниченной доступности ресурсов, q интенсивность противоборства хищников и паразитов. Переходный режим уравнения опишет динамику пилообразной вспышки численности. Вспышка самопроизвольно гаснет, модель демонстрирует затухающий релаксационный цикл, траектория стремится к равновесию – порогу регистрируемой активности, когда вид существует, но симптомов деятельности не наблюдается. Для реализации новой серии пиков с большой амплитудой достаточно вывести систему из равновесия внешним воздействием. Наблюдаемая картина в вычислительном эксперименте будет зависеть от величины воздействия. Однако если запаздывание чрезмерно, мы можем получить после переходного режима неограниченную траекторию. В Черном море участие в подавлении вспышек вредного гребневика принял другой вселенец-хищник *Beroe ovata*, но у берегов Ирана хищник не появлялся.

Динамика вспышек листовертки отличается в различных локальных ареалах Северной Америки. Одним модельным уравнением не удастся описать все нюансы сценариев поведения популяции прожорливой бабочки.

Работа поддержана грантом РФФИ № 17-07-00125 (СПИИРАН).

Список литературы:

1. *Perevaryukha A.Y.* Modeling abrupt changes in population dynamics with two threshold states // *Cybernetics and Systems Analysis*. 2016. № 4. P. 623-630.

О НЕЯВНОМ МЕТОДЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛМОГОВОРА – ПЕТРОВСКОГО – ПИСКУНОВА

С.В. Пикулин

ВЦ ФИЦ ИУ РАН, spikulin@gmail.com

Различные автоволновые процессы, происходящие в живой и неживой природе, такие, как горение, сокращение сердечной мышцы, распространение нервных импульсов и т.д. могут быть смоделированы при помощи уравнения

Колмогорова – Петровского – Пискунова [1] – нелинейного параболического уравнения второго порядка, имеющего вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = F(u),$$

либо при помощи системы таких уравнений.

На примере уравнения Фишера – частного случая уравнения Колмогорова – Петровского – Пискунова при $F(u) = u(1 - u)$ в докладе представлен новый неявный численный метод решения уравнений этого класса, использующий метод Ньютона – Канторовича на каждом шаге по времени.

Работа поддержана грантом РФФИ № 16-01-00781.

Список литературы:

1. Колмогоров А. Н., Петровский И. Г., Пискунов И. С. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества и его применение к одной биологической проблеме // Бюллетень МГУ. Секция А. 1937. Т.1, №6. С. 1–25.

ОПТИМИЗАЦИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ МИШЕНИ

И.В. Пономарев, Г.В. Долголева

*Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова,
wingof17@mail.ru*

Работа цилиндрической микромишени с использованием безударного сжатия рассматривалась ранее авторами работы [1].

Цель данной работы: провести исследование расчета, опубликованного в работе [1] на сходимость по пространственным точкам и численно оптимизировать мишень.

	DT	Au	Pb	Au	
	m_0	m_1	m_2	m_3	
	----- ----- //////////////////// -----				
r	0	0.2	0.21	0.39	0.444
ρ_0	0.2	19.3	6	19.3	

Рис. 1. Геометрия системы

Рассматривается однокаскадная цилиндрическая мишень, параметры которой приведены на рисунке

1. Выполнена серия расчетов с различным количеством точек.

Полученные результаты показали устойчивость расчетных характеристик исследуемой мишени к увеличению числа пространственных точек для интересующей авторов величины энерговыделения.

2. В докладе приведены результаты численной оптимизации геометрии мишени по величине максимального энерговыхода из системы. При этом меняется только геометрия системы: все радиусы системы, приведенной на рисунке 1 и взятой за номинал, умножаются на коэффициент пропорциональности k .

Из расчетов видно, что самое большое энерговыделение в мишени для следующей геометрии: $k=1.6$.

Список литературы:

1. Долголёва Г.В., Забродин А.В. Разработка термоядерных мишеней на основе реализации концепции безударного сжатия // *Аэромеханика и газовая динамика* 2002, №2, с. 48-54.

КИНЕТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЕРЕНОСА ТЕПЛА В СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ (СТОХАСТИЧЕСКИЙ И ДЕТЕРМИНИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОДЫ)

И.Ф. Потапенко¹, С.А. Карпов²

¹*ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 125047, Москва, Российская Федерация,
irina@keldysh.ru, firena@yandex.ru*

²*Всероссийский исследовательский институт автоматики им. Н.Л. Духова,
127055, Москва, Российская Федерация, karpov.st@yandex.ru*

Кинетическое описание динамики плазмы важно для многих приложений. Например, взаимодействие лазерного интенсивного излучения с плазмой приводит к появлению больших градиентов температуры и плотности, что ставит под сомнение возможность описания современных лазерных экспериментов в рамках классической транспортной теории. В то же время, электронный тепловой поток, который играет ключевую роль в энергетическом балансе лазерной плазмы, часто моделируется весьма приближенно. Аналитическая теория нелокального переноса рассматривает лишь небольшие отклонения от равновесия. Таким образом, единственный путь вычислить параметры теплового переноса в плазме с температурной неоднородностью масштабом меньше или порядка сотни электронных длин свободного пробега — это численное моделирование кинетического уравнения со столкновительным интегралом Ландау (Фоккера-Планка).

Многомасштабный характер задачи является сложной проблемой для всех областей температурной неоднородности. Мы представляем численное моделирование, выполненное с помощью наших вычислительных кодов, которые используют два различных подхода: стохастический и

детерминистический. Первый – для нелинейного уравнения Власова-Ландау (Фоккера-Планка) в 1D3V геометрии основан на методе прямого дискретного моделирование типа Монте-Карло (DSMC). Этот метод объединяет моделирование методом частица-в-ячейке (PiC) для «власовской» части кинетического уравнения и алгоритм типа Монте-Карло для столкновительного интеграла Ландау, который аппроксимируется интегралом столкновений Больцмана [1]. Детерминистический подход рассматривает кинетическое уравнение в 1D2V геометрии на основе так называемых сохраняющих асимптотику разностных схем (см., например, работу [2] и ссылки в ней). В этой работе мы даем краткий сравнительный анализ эффективности этих двух численных методов.

В качестве иллюстративного примера представлен эффект распространения тепла, вызванный мгновенным изменением температуры стенки. Кинетические эффекты, воздействующие на распространение тепловой волны, структура электронной функции распределения в различных пространственно-временных областях, автомодельное поведение решения и т. д., анализируются. Результаты исследования и численные подходы могут быть интересны для разнообразных приложений.

Благодарности. Авторы благодарят частичную финансовую поддержку РФФИ (Грант № 17-51-52007, 18-32-00406), а также А.В. Бобылева, В.Ю. Быченкова за многочисленные плодотворные дискуссии.

Список литературы:

1. *Bobylev A.V., Potapenko I.F.* Monte Carlo methods and their analysis for Coulomb collisions in multicomponent plasmas// *Journal of Computational Physics*. 2013. V.246. P.123-144.
2. *S. Guisset, S. Brull, B. Dubroca, E. d’Humi`eres, S. Karpov and I. Potapenko.* Asymptotic-Preserving scheme for the M1-Maxwell system in the quasi-neutral regime// *Communications in Computational Physics*. 2016. V.19, N 2. P. 301-328.

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ГИДРОДИНАМИКИ В УСЕЧЕННЫХ РАСЧЕТНЫХ ОБЛАСТЯХ

И.И. Потапов, К.С. Снигур

ВЦ ДВО РАН, e-mail: potapov2i@gmail.com, snigur.ks@ccfebras.ru

Предложена новая математическая модель для решения задачи гидродинамики в усеченной расчетной области, которая включает систему квазигидродинамических уравнений и граничные условия Донга на границе вытекания.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \nabla_j (u_i u_j) + \frac{1}{\rho} \nabla_i p = \nabla_j [\eta (\nabla_j u_i + \nabla_i u_j)] - \frac{2}{3} \nabla_i (\eta \nabla_k u_k) + \nabla_j [\eta (\omega_i u_j + \omega_j u_i)] \quad (1)$$

$$\nabla_i^2 p = \frac{\rho}{\sigma} \nabla_i u_i - \alpha_r \rho \nabla_i (u_j \nabla_j u_i) \quad (2)$$

где

$$\omega_i = \sigma \left(u_j \nabla_j u_i + \frac{1}{\rho} \nabla_i p \right), \quad i, j = 1, 2. \quad (3)$$

Уравнения (1) – (3) замыкаются начальными условиями и граничными условиями

$$\begin{aligned} u_i &= u_{i,0} & x_i &\in \Omega \\ u_i &= u_{i,in}(y), & \nabla_j p n_j &= c_{in}(y), & x_i &\in \Omega_{in}, \\ \nabla_j u_i n_j &= q_{i,out}(y) & p &= (\eta \nabla_j u_k) n_j n_k - S, & x_i &\in \Omega_{out}, \\ u_i &= u_{i,bed}(x), & n_j \nabla_j p &= 0, & x_i &\in \Omega_{bed}, \\ u_i &= u_{i,top}(x), & n_j \nabla_j p &= 0, & x_i &\in \Omega_{top}, \\ q_{i,out} &= \frac{1}{\eta \rho} (p + S - \nabla_j u_j) n_i, & S &= \frac{\rho}{4} |u_k| \left(1 - \tanh \frac{u_k n_k}{U_0 \delta} \right) & i, j, k &= 1, 2. \end{aligned}$$

Разработан алгоритм решения задачи гидродинамики с применением метода конечных элементов и метода контрольных объемов. Выполнено численное моделирование движения потока Коважного и движения потока за обратным уступом в усеченных расчётных областях. Выполненный в работе сравнительный анализ показал, что предложенная математическая модель адекватно описывает движение гидродинамического потока в усеченной области.

Работа поддержана грантом РФФИ № 18-05-00530.

ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПОМОЩЬЮ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ

Е.А. Родина¹, С.П. Баутин^{1,2}

¹Уральский государственный университет путей сообщения,
rodinaekan@gmail.com, sbautin@usurt.ru

²Снежинский физико-технический институт НИЯУ МИФИ, sbautin@usurt.ru

Рассмотрена полная система уравнений Навье-Стокса в случае одномерного плоско-симметричного течения вязкого теплопроводного сжимаемого газа, с независимыми термодинамическими параметрами $\delta = 1/\rho$ – удельный объем, p – давление [1, 2]. Для неё поставлена начально-краевая

задача с условием непротекания на границах $x = 0$ и $x = \pi$ и условием теплоизоляции на этих же границах.

Решение данной начально-краевой задачи представляется в виде бесконечных тригонометрических рядов. Чтобы получить уравнения для коэффициентов рядов, каждое уравнение системы проецируется на свою систему базисных гармоник. Из-за того, что эти коэффициенты зависят только от одной переменной, данной процедурой задача построения всего решения сводится к решению бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Чтобы численно построить решение полученной СОДУ, ограничиваем количество слагаемых рядов, а также упрощаем выражения в правых частях СОДУ, избавившись от двойных сумм. Данная СОДУ решается с помощью метода Рунге-Кутты 4-го порядка точности. После нахождения коэффициентов рядов, их значения подставляются в исходное представление решения.

Полученное решение полной системы уравнений Навье-Стокса совпадает с результатами предыдущих исследований, полученными в [1].

Список литературы:

1. *Баутин С.П., Замыслов В.Е., Скачков П.П.* Математическое моделирование тригонометрическими рядами одномерных течений вязкого теплопроводного газа. Новосибирск: Наука; Екатеринбург: Изд-во УрГУПС, 2014.
2. *Баутин С.П.* Характеристическая задача Коши и её приложения в газовой динамике. Новосибирск: Наука, 2009.

БАЗА ДАННЫХ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ СЕРВИСЫ ДЛЯ ХРАНЕНИЯ И ОБРАБОТКИ СУПЕРВТОРИЧНЫХ СТРУКТУР БЕЛКОВЫХ МОЛЕКУЛ

В.Р. Руднев¹, Д.А. Тихонов², Л.И. Куликова², М.Ю. Губин³

¹*Институт теоретической и экспериментальной биофизики РАН,
volodyarv@mail.ru*

²*Институт математических проблем биологии РАН – филиал ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, dmitry.tikhonov@gmail.com, likulikova@mail.ru*

³*Национальный исследовательский Томский политехнический университет,
Томский политехнический университет, mgubin@tpu.ru*

В настоящее время объектом пристального внимания исследователей являются структурные мотивы, имеющие уникальные укладки полипептидной цепи в пространстве. Такой интерес к структурным мотивам обусловлен уникальностью структур и их возможностью быть зародышами, к которым остальные участки цепи в процессе сворачивания белков могут пристраиваться в соответствии с простыми принципами [1]. Однако, независимо от того, по какому механизму происходит сворачивание белка, структурные мотивы могут

быть использованы для создания системы структурной классификации белков [2]. В работе проведен анализ вторичной структуры аминокислотной цепи всех белковых молекул, зарегистрированных в PDB. Для каждого PDB-файла проведено распознавание и отбор спиральных пар из белковой цепочки. Для каждой пары построена геометрическая модель и произведен расчет различных геометрических характеристик. Проведен расчет матриц редакционных расстояний для первичных структур. Создана база данных спиральных структур с рассчитанными геометрическими характеристиками, соответствующими аминокислотными последовательностями. Также реализован набор аналитических вычислительных сервисов, доступных через web интерфейс. По базе данных проведен статистический анализ, по результатам которого выявлены характерные признаки структурного мотива типа α - α уголок. Полученные результаты используются для построения алгоритма предсказания пространственных структур по аминокислотной последовательности.

Работа поддержана грантом РФФИ № 18-07-01031.

Список литературы:

1. *Efimov A.V.* Standard structures in proteins. // Prog. Biophys. Molec. Biol. 1993. V. 60. P. 201–239.
2. *Gordeev A.B., Kargatov A.M., Efimov A.V.* PCBOST: Protein classification based on structural trees. // Biochemical and Biophysical Research Communications. 2010. V. 397. P. 470–471.

МНОГОМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ. ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД

Ю.Г. Рыков

*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
rykov@keldysh.ru*

В настоящем докладе предложена вариационная трактовка понятия обобщенного решения многомерных систем законов сохранения. Также рассмотрены следствия такой трактовки, помогающие описывать эволюцию особенностей для вырожденной системы уравнений газовой динамики без давления (кратко: ГДбД, эта система наиболее «близка» к классическому случаю использования вариационного представления – уравнению Хопфа). В [1] вариационная трактовка рассмотрена для одномерных систем, а в [2] процесс формирования особенностей изучался для ГДбД в двумерном случае.

Пусть $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \sum_{j=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} (\mathbf{F}_j(\mathbf{U})) = 0; \mathbf{U}(t, \mathbf{x}) \equiv \left\{ u_i(t, \{x_j\}) \right\}: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \quad (1)$$

и соответствующий ей вектор-функционал (без уточнения начальных данных), где интегрирование происходит по многообразию S коразмерности 1,

$$J \equiv \int \dots \int U dx + \sum_{j=1}^m (-1)^j F_j(U) dt \wedge \widehat{dx}_j, dx \equiv dx_1 \wedge \dots \wedge dx_m, \widehat{dx}_j \equiv dx_1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx}_j \wedge \dots \wedge dx_m$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Обобщенным решением системы законов сохранения (1) назовем такую функцию $U(t, \{x_j\})$, что вариация $\delta_S J = 0$ для любой S .

Для ГДБД указанное определение приводит к необходимости равенства нулю вариации по m -мерному объему A в координатах Лагранжа \mathbf{a}

$$J \equiv \int \dots \int \left[U_0(\mathbf{a}) - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{t} \right] \rho_0(\mathbf{a}) d\mathbf{a},$$

а эволюция особенностей определяется такой параметризацией A : $\mathbf{a}(\tau, s_1, \dots, s_{m-1}) \equiv \mathbf{a}(\tau, \mathbf{s})$, что для фиксированных значений \mathbf{s} вектор функция

$$\Phi(\tau, \mathbf{s}) \equiv \int_{\tau_0}^{\tau} \left[U_0(\mathbf{a}) - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{a}}{t} \right] \rho_0(\mathbf{a}) \frac{\partial \mathbf{a}(\tau, \mathbf{s})}{\partial(\tau, \mathbf{s})} d\tau,$$

как функция τ имеет по координатам два экстремума с совпадающими в них значениями Φ (аналогично ситуации для уравнения Хопфа). Далее концентрация особенностей зависит от поведения интегралов от Φ по \mathbf{s} .

Работа поддержана Российским научным фондом, грант № 14-21-00025.

Список литературы:

1. Рыков Ю.Г. О вариационном подходе к системам квазилинейных законов сохранения // Труды МИАН. 2018. Т.301. С. 225 – 240.
2. Рыков Ю.Г. Двумерная газовая динамика без давления и вариационный принцип // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2016. № 94. 14 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ПРОЦЕССА ПЕРЕМЕШИВАНИЯ СЛОЕВ МИШЕНИ НА ЕЕ ГОРЕНИЕ

А.А. Сарин, Г.В. Долголева

МГУ им. М.В. Ломоносова, tema_drema1@mail.ru

С середины прошлого столетия важной проблемой мировой энергетики стала проблема осуществления термоядерного синтеза, получение термоядерной энергии. Термоядерная энергия – это энергия, выделяемая при термоядерных реакциях.

Необходимое условие осуществления термоядерной реакции - достижение очень высоких плотностей и температур (десятки миллионов градусов и выше) для ДТ смеси.

Для достижения этих условий мишень облучается потоком частиц. Эти частицы являются источником энергии для сжатия и нагрева мишени.

Одной из важных проблем при достижении зажигания мишени, получения термоядерной энергии, является проблема перемешивания слоев.

Перемешивание между топливом и оболочкой, его сжимающей, приводит к фактическому увеличению объема, занимаемого топливом, к увеличению потока тепла, выходящего из топлива, снижению максимальной плотности и температуры. В результате надо увеличивать вкладываемую в мишень энергию, которая необходима для “зажигания” мишени. Но ее значение не может быть оценено без детального изучения процесса развития неустойчивости и перемешивания слоев.

Исследование этого процесса и составляет цель данной работы.

Была выбрана k - ϵ модель [1], обладающая достаточной простотой, но при этом описывающая процессы перемешивания с достаточной точностью; составлена разностная схема для расчета основных уравнений модели; по данной схеме написана программа расчета массовых долей смеси, энергии и скорости диссипации энергии.

Задача была отлажена на гравитационном перемешивании плоских слоев [2]. В докладе приведены также численные результаты перемешивания слоев для мишени, исследуемой на установке NIF [3].

Список литературы:

1. *Неуважаев В.Е.* Математическое моделирование турбулентного перемешивания.- Снежинск: Изд. РФЯЦ – ВНИИТФ, 2007.
2. *Yu.A.Kucherenko, L.I.Shibarshov, V.I Chitajkin* at al. Experimental study of the gravitational turbulent mixing self-similar mode // 3-rd International Workshop on the physics of compressible turbulent mixing, 1991, pp.345-356.
3. *Cray M.* Resolving NIF Target Performance issues // Inertial Confinement Fusion Advisory Committee Fifth Meeting. Rochester, NJ, May 19, 1994.

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ ПОЯСА КОЙПЕРА

В.В. Сидоренко¹, С.С. Ефимов²

¹*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
vvsidorenko@list.ru*

²*Московский физико-технический институт*

Поясом Койпера называют область Солнечной системы, внутренней границей которой является орбита Нептуна, а внешняя граница располагается на расстоянии около 50 астрономических единиц от Солнца). Оценки, основанные на астрономических открытиях двух последних десятилетий, указывают на наличие в поясе Койпера порядка 100000 небесных тел с

диаметром более 100 км. Важной особенностью пояса Койпера является распространенность «резонансных» структур, представляющих семейства объектов, движущихся в резонансе с Нептуном.

В наших исследованиях динамическая структура пояса Койпера изучалась аналитическими и численными методами. Аналитическое рассмотрение опиралось на современные методы анализа резонансных эффектов в многочастотных гамильтоновых системах, в развитие которой большой вклад внесли отечественные специалисты (В.И.Арнольд, А.Д.Брюно, А.И.Нейштадт, Д.В.Трещев и др.). Основное внимание было сосредоточено на двух семействах резонансных объектов пояса Койпера: «тутино» и «плутино». Объекты семейства «тутино» совершают один оборот вокруг Солнца за время, в течение которого Нептун совершает два оборота (резонанс 1:2). Эти объекты фактически образуют внешнюю границу пояса Койпера. Объекты семейства «плутино» делают два оборота вокруг Солнца за время, в течение которого Нептун совершает три оборота (резонанс 2:3). Семейство «плутино» представляет особый интерес как самое многочисленное в сравнении с другими семействами. Для указанных семейств была, в частности, уточнена теория эффекта Козаи-Лидова, проявляющегося в долгопериодической модуляции параметров орбитального движения малых небесных тел.

Численное моделирование динамики «тутино» и «плутино» подтвердило полученные аналитические результаты и позволило получить дополнительную информацию о свойствах движения в тех случаях, когда аналитические методы неприменимы. Для численных исследований мы использовали пакет «Mercury-6», разработанный английским астрофизиком Дж. Чамберсом (J.Chambers). В настоящее время этот пакет является общепринятым инструментом численного изучения движения систем многих тел.

Наша работа является естественным развитием исследований по эволюционной небесной механике, проводимых в ИМП им. М.В.Келдыша с середины XX века под руководством А.Д.Брюно, М.Л.Лидова и Т.М.Энеева. Авторы выражают благодарность Президиуму РАН за финансовую поддержку их работы в рамках Программы №28 "Космос: исследования фундаментальных процессов и их взаимосвязей".

ОПТИМИЗАЦИЯ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ ДЛЯ КРИТИЧЕСКОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ КОНВЕКЦИИ ПРИ БЫСТРОМ ВРАЩЕНИИ

С.В. Старченко

ИЗМИРАН, sstarchenko@mail.ru

Тепловая и/или композиционная конвекция во вращающемся быстро слое актуальна для моделирования соответствующих геосфер, слоев других планет, их спутников, звезд и экспериментальных объектов. Для плоского слоя я, продолжая и уточняя [1], предлагаю оптимальный коэффициент подобия $\delta \ll 1$,

определяющий насколько быстро вращение через отношение типично малого размера перпендикулярного оси вращения к толщине слоя. Оптимизация заключается том, что «умеренно» малое δ ($\sim 10^{-3}$ в Земле) замещает экстремально малое классическое число Экмана E ($\sim 10^{-15}$ в Земле), а второй «умеренно» большой оптимальный коэффициент подобия $S = \delta^3/E$ ($\sim 10^6$ в Земле) замещает аномально огромное классическое число Рэлея ($\sim 10^{27}$ в Земле). Аналогичные оптимальные коэффициенты предлагаются в этой работе и для сферического слоя. Дальнейшая оптимизация заключается в том, что изначальная 3D PDE эволюционная система для пяти переменных сводится практически к 2D системе из трех переменных: температуры, вертикальной компоненты скорости и давления. В итоге – оптимальная нелинейная система впервые может быть решена при реальных параметрах Земли, планет и лун [2]. Критическую же линейную систему удастся и вовсе упростить до двух ОДУ первого порядка, выделяя сингулярную составляющую ВКБ типа. Эти ОДУ решены аналитически, асимптотически и численно при наиболее интересных для практики числах Прандтля и различных толщинах слоя [1-2]. Используя полученные точно критические значения и порядковые нелинейные оценки, я нахожу турбулентные коэффициенты переноса и другие ключевые типичные физические параметры для конвекции и магнетизма в недрах планет и лун.

Эта работа преимущественно госбюджетная, а частично поддержана грантом РФФИ № 16-05-00507 и программой № 28 Президиума РАН.

Список литературы:

1. Старченко С.В. Масштабирование и возбуждение комбинированной конвекции в быстро вращающемся плоском слое // ЖЭТФ. 2017. Т. 151. вып. 2. С. 409–415.
2. Старченко С.В. Энергетические параметры геодинамо совместимые с аналитическими, численными, палеомагнитными моделями и наблюдениями // Физика Земли. 2017. № 6. С. 110–124.

МАСШТАБИРОВАНИЕ И ВОЗБУЖДЕНИЕ ТЕПЛОЙ КОНВЕКЦИИ ВО ВРАЩАЮЩЕМСЯ БЫСТРО СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ

С.В. Старченко¹, М.С. Котельникова²

¹ИЗМИРАН, sstarchenko@mail.ru

²ИГиЛ СО РАН, kotelnikova@hydro.nsc.ru

Предложено масштабирование тепловой конвекции во вращающемся быстро сферическом слое для моделирования соответствующих слоев Земли, других планет, их спутников, звезд и экспериментальных объектов. Масштабирование основано на самосогласованных оценках типичных физических величин. Новый малый коэффициент подобия δ определяет насколько быстро вращение через отношение типично малого размера

перпендикулярного оси вращения к внешнему радиусу сферического слоя R . Еще меньшую вязкость характеризует известное число Экмана $E \ll 1$. При возбуждении конвекция имеет основной масштаб порядка $E^{1/3}R$. Разлагая δ по степеням E и выделяя сингулярную составляющую ВКБ типа, удастся упростить изначальную систему до двух ОДУ первого порядка. Они решены аналитически в оригинальном «экваториальном» приближении. Критические частоты, азимутальные волновые числа, определяющие числа Рэлея размеры δ в этом приближении и аналитические асимптотические решения, описывающие возбуждающуюся конвекцию, получены при наиболее интересных для практики числах Прандтля $\sigma = 1$, $\sigma \gg 1$ и различных толщинах слоя. Полученные аналитические результаты успешно сравнивались с нашим асимптотически 1D численным решением системы ОДУ, а также результатами полного численного 3D моделирования из работы [1]. Получены решения и для других частных числах σ , следуя [2, 3]. Для нелинейной системы вводится новый критерий подобия $s = E/\delta^3$, упрощающий вместе с δ 3D систему для пяти переменных до практически 2D системы из трех переменных: температуры, вертикальной компоненты скорости и давления.

Эта работа преимущественно госбюджетная, а частично поддержана грантом РФФИ № 16-05-00507 и программой № 28 Президиума РАН.

Список литературы:

1. *Al-Shamali F.M., Heimpel M.H., Aurnou J.M.* Varying the spherical shell geometry in rotating thermal convection // *GAFD*. 2004. V.98 No.2. P. 153–169.
2. *Starchenko S. V., Jones C. A.* Typical velocities and magnetic field strengths in planetary interiors // *Icarus*. 2002. V.157 No.2. P.426-435.
3. *Starchenko S.V., Pushkarev Y.D.* Magnetohydrodynamic scaling of geodynamo and a planetary protocore concept // *Magnetohydrodynamics*. 2013. V.49 No. (1-2). P. 69-71.

ВАРИАЦИОННЫЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ НА ПРИМЕРЕ ГЕОМАГНИТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ГАУССА С 1590 Г.

С.В. Старченко, С.В. Яковлева

*Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн
РАН; sstarchenko@mail.ru; svyakov@izmiran.ru*

Мы предлагаем новый тип анализа временных рядов, который определяет характеристики временных интервалов, присущих рассматриваемому ряду. Естественной частотной мерой для подобного интервала является отношение временной производной к самой величине, что эквивалентно логарифмической производной, которую мы далее зовем – вариация. Положительные вариации

равны степени экспоненциального роста, а отрицательные – падения для модуля рассматриваемой величины. Рассматривая свойства множества вариаций, мы получаем необходимые характеристики.

В качестве примера, основываясь на моделях геомагнитного поля IGRF [1] (1900-1915) и *gufm1* [2] (1590-1990), мы исследуем эволюцию вариаций коэффициентов Гаусса, определяющих геомагнитные мультиполи. Очевидно практически полное отсутствие гармонических периодичностей. Подобное нелинейное поведение присуще большинству процессов. Тем не менее, они преимущественно исследуются по сути линейными гармоническими спектральными и вейвлет анализами, а наш анализ нацелен на исследование нелинейных систем. Рассматриваемые геомагнитные вариации кластеризуются на длинные «спокойные» периоды с умеренными по абсолютной величине вариациями и короткие «возмущенные» периоды с пиковыми выбросами. Вариации симметричных относительно оси вращения Земли мультиполей в основном на два порядка меньше несимметричных вариаций.

При вероятностном подходе мы в качестве простейшей статистической гипотезы предполагаем, что каждая из вариаций дает равновероятный вклад в ее проявление на соответствующем временном интервале. Это позволяет строить распределение плотностей вероятности в фазовом пространстве вариация-время, что нам представляется перспективнее традиционного вейвлет анализа. При этом медианная средняя величина (с учетом знака) по всем вариациям мала – по модулю $\sim 1/(400 \text{ лет})$. Степень нелинейности велика, поскольку модуль среднего для положительных и отрицательных (отдельно) вариаций составляет $\sim 1/(25 \text{ лет})$ в «спокойные» периоды, что на порядок больше медианного среднего. Еще в несколько раз больше подобные средние в короткие возмущенные периоды. Так же мы предлагаем специальные средние между положительными и отрицательными вариациями для оценки степени периодичности и суммарных вероятностей роста или падения.

Работа поддержана грантом РФФИ № 16-05-00507.

Список литературы:

1. IGRF: the 12th generation <https://www.ngdc.noaa.gov/AGA/vmod/igrf.html>
2. *Jackson, A., Jonkers, A. R. T., Walker, M. R.*, Four centuries of geomagnetic secular variation from historical records. *Phil. Trans. R. Soc. Lond.* 2000. A358. P. 957–990.

О НЕКОТОРЫХ ТИПАХ МГД-ТЕЧЕНИЙ В ПРОДОЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Е.В. Степин

*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН,
eugene.v.stepin@gmail.com*

Развивая предыдущие исследования [1], в настоящем докладе рассматриваются ранее не изученные режимы магнитогазодинамических (МГД) течений плазмы в коаксиальных каналах плазменных ускорителей (рис. 1) во внешнем продольном магнитном поле.

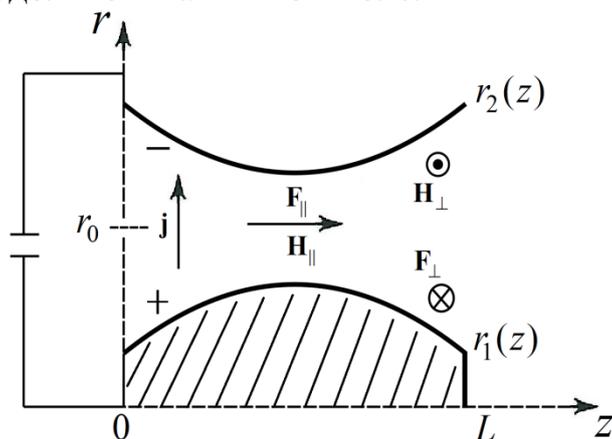


Рис. 1. Схема коаксиального плазменного ускорителя

В присутствии продольного поля течения в каналах подразделяются на два различных по своим особенностям класса: сверхальфвеновские, в которых продольная скорость плазмы превосходит альфвеновскую скорость сигнала, рассчитанную по продольному полю, и доальфвеновские с обратным соотношением [2].

В докладе представлены результаты теоретических и численных исследований трансальфвеновских течений, в которых происходит переход потока через альфвеновскую скорость сигнала. Часть внимания уделена определению особенностей процесса установления и свойств доальфвеновских ускорительных течений с переходом потока через медленную магнитозвуковую скорость. Представленные в докладе результаты получены для узких каналов различной геометрии в квазиодномерном приближении.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00351.

Список литературы:

1. *Брушлинский К.В.* Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. – М.: БИНОМ, Лаборатория знаний, 2009. – 200 с.
2. *Морозов А.И., Соловьев Л.С.* Стационарные течения плазмы в магнитном поле // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. – М.: Атомиздат, 1974. – Вып. 8. – С. 3-87.

СПЕКТРАЛЬНО-БЕССЕТОЧНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ПЛОСКОЙ ВИХРЕВОЙ ДИНАМИКИ НЕВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А.М. Филимонова, В.Н. Говорухин

*Южный федеральный университет, afilimonova@sfnu.ru,
vngovoruhin@sfnu.ru*

Доклад посвящен численному анализу динамики двумерных вихревых структур в невязкой несжимаемой жидкости спектрально-бессеточным методом. Вихревые структуры рассматриваются в прямоугольной области со сторонами $2a$ и $2b$. Задача описывается в терминах абсолютной завихренности $q = q(x, y)$ и функции тока $\psi = \psi(x, y)$ в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} \frac{Dq}{Dt} \equiv q_t + \psi_y q_x - \psi_x q_y = 0, \\ -\Delta\psi = \omega = q - f = -\frac{1}{2}\gamma r^2, \end{cases} \quad (1)$$

где t – время, x, y – координаты на плоскости, $f = f(x, y)$ – планетарная завихренность, γ – параметр, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, а индексы означают дифференцирование по переменной. Первое уравнение системы (1) описывает пассивный перенос завихренности жидкими частицами. Второе уравнение связывает $q(x, y)$ и функцию тока $\psi(x, y)$.

Для анализа динамики и взаимодействия вихревых конфигураций разработан бессеточный вариант метода вихрей-в-ячейках, основанный на подходах работ [1-3]. В его основе лежат аппроксимация поля завихренности кусочно-непрерывными функциями по его значениям в жидких частицах и численном вычислении функции тока $\psi(x, y)$ методом Бубунова-Галеркина.

Представлены результаты тестовых расчетов, подтверждающие применимость разработанной численной схемы к решению задачи (1), а также некоторые результаты численного исследования влияния значения параметра γ на процессы взаимодействия и перемешивания вихревых структур на плоскости.

Список литературы:

1. Говорухин В.Н. Вариант метода вихрей в ячейках для расчета плоских течений идеальной несжимаемой жидкости // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т.51 №6. С. 1133-1147.
2. Govorukhin V. A meshfree method for the analysis of planar flows of inviscid fluids // Lecture Notes in Computational Science and Engineering Vol. 89, 2013, pp. 171-180.
3. Говорухин В.Н. Численный анализ динамики распределенных вихревых конфигураций // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2011. Т.56 №8. С. 1491–1505.

ЧИСЛЕННЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ГЕТЕРОГЕННЫХ СИСТЕМ

Е.А. Цветова

*Институт вычислительной математики
и математической геофизики СО РАН*

Для изучения гидро-геохимических процессов, протекающих в озере Байкал, в ИВМиМГ СО РАН разрабатывается комплекс математических моделей гидро-термодинамики, переноса и трансформации примесей, находящихся в различных фазовых состояниях. Актуальность таких комплексных исследований в последнее время возрастает в связи с обнаружением подводных выходов газа и открытием залежей газогидратов на дне озера. С помощью этого комплекса решаются различные задачи о моделировании гидротермодинамики гетерогенной системы, в состав которой входят вода и метан в различных фазовых состояниях.

Задачи решаются в трехмерных пространственных постановках с учетом специфических физико-географических условий озера. Основной блок системы моделирования составляет математическая модель гидротермодинамики воды в негидростатическом приближении. Она представлена системой уравнений в частных производных для трех компонентов вектора скорости, уравнения для температуры, уравнения состояния и уравнения неразрывности. В системе уравнений учитываются силы Кориолиса, перенос и турбулентная диффузия моментов количества движения и тепла.

С вычислительной точки зрения основная задача состоит в разработке экономичных численных схем, допускающих параллельную реализацию на современных вычислительных системах.

Для построения согласованных численных алгоритмов используется вариационный подход [1], в соответствии с которым для всей системы строится интегральное тождество, вытекающее из определения обобщенного решения задачи. Это тождество затем аппроксимируется с использованием схем расщепления. Расщепление производится как по физическим механизмам, так и по пространственным переменным. Для операторов типа конвекции-диффузии-реакции мы строим дискретно-аналитические схемы на основе техники сопряженных интегрирующих множителей [2].

Работа выполняется в рамках темы государственного задания ИВМиМГ СО РАН № 0315-2016-0004 и гранта РФФИ №17-01-00137.

Список литературы:

1. Пененко В. В., Цветова Е. А., Пененко А. В. Развитие вариационного подхода для прямых и обратных задач гидротермодинамики и химии атмосферы// Известия РАН. Физика атмосферы и океана, 2015, том 51, № 3, с. 358–367.

2. *Penenko V.V., Tsvetova E.A., Penenko A.V. Variational approach and Euler's integrating factors for environmental studies// Computers and Mathematics with Applications, 2014, V.67, Issue 12, Pages 2240–2256.*

ЧИСЛЕННАЯ СХЕМА, СОХРАНЯЮЩАЯ КОСИММЕТРИЮ ЗАДАЧИ АНИЗОТРОПНОЙ ФИЛЬТРАЦИОННОЙ КОНВЕКЦИИ ЖИДКОСТИ С НАНОЧАСТИЦАМИ

В.Г. Цибулин¹, М.А. Абделхафиз²

¹*Южный федеральный университет, vgcibulin@sfedu.ru*

²*Сухаг университет, Сухаг 82524, Египет*

В плоской постановке рассматривается возникновение конвекции теплопроводной жидкости с наночастицами в пористой среде. В случае анизотропии жидкости и среды на основе уравнений Дарси-Буссинеска и с учетом эффекта Соре проводится анализ неустойчивости механического равновесия для прямоугольника с градиентами температуры и концентрации примеси (наночастиц) по высоте. Получены условия, при которых задача является косимметричной, и выведены явные формулы для критических чисел Рэлея, отвечающих монотонной неустойчивости, обобщающие результаты [1].

Построена конечно-разностная схема для системы уравнений относительно функции тока, температуры и концентрации наночастиц. Для задачи в естественных переменных развиты сохраняющие косимметрию аппроксимации на смещенных сетках аналогично [2].

Для случая монотонной неустойчивости проведены вычисления потери устойчивости механического равновесия. На плоскости температурного и концентрационного чисел Рэлея построены нейтральные кривые для различных комбинаций управляющих параметров, рассчитаны участки монотонной и колебательной неустойчивости. Установлена зависимость от параметров термодиффузии концентрационного числа Рэлея, при котором колебательная неустойчивость предшествует монотонной.

Список литературы:

1. *Абделхафиз М.А., Цибулин В.Г. Влияние анизотропии на конвекцию теплопроводной жидкости в пористой среде и косимметрия задачи Дарси // Изв. РАН. МЖГ. 2017. № 1. С. 53-61.*
2. *Абделхафиз М.А., Цибулин В.Г. Численное моделирование конвективных движений в анизотропной пористой среде и сохранение косимметрии // ЖВМ и МФ, 2017. Т. 57, № 10. С. 154-167.*

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ РАДИАЦИОННОГО ТЕПЛООБМЕНА

А.Ю. Чеботарев

ИПМ ДВО РАН, *cheb@iam.dvo.ru*

Анализ задач сложного теплообмена в рассеивающих средах с отражающими границами представляет интерес в силу своей прикладной значимости. Имеется значительное число работ по численному моделированию процессов радиационного, кондуктивного и конвективного переноса тепла в сплошных средах. В то же время проблемы теоретического и численного анализа обратных задач для моделей, включающих в себя уравнение переноса тепла и уравнение, описывающее перенос теплового излучения, являются в основном открытыми.

Рассматривается модель радиационного теплообмена в ограниченной трехмерной области с отражающей границей, где используется диффузионное P1 приближение для уравнения переноса излучения:

$$-a\Delta\theta + b\kappa_a(|\theta| \theta^3 - \phi) = f, \quad -\alpha\Delta\phi + \kappa_a(\phi - |\theta| \theta^3) = 0, \quad (1)$$

$$a\partial_n\theta + \gamma(\theta - \theta_b)|_\Gamma = 0, \quad \alpha\partial_n\phi + u(\phi - \theta_b^4)|_\Gamma = 0. \quad (2)$$

Здесь θ - нормализованная температура, ϕ - интенсивность излучения, усредненная по всем направлениям. Физические параметры a , b , u , α , γ описывают термические и радиационные свойства среды [1].

В докладе формулируются обратные задачи для нелинейной эллиптической системы (1), (2) состоящие в определении неизвестной правой части в уравнении теплопроводности, либо неизвестной функции u в краевом условии, по дополнительной информации о решении, заданной в виде интегрального переопределения, либо в виде дополнительного краевого условия для температуры [2]. Представлены новые априорные оценки решений обратных задач, на основе которых доказаны теоремы разрешимости. Найдены условия единственности решений. Предложены алгоритмы решения обратных задач, проиллюстрированные численными примерами.

Работа поддержана грантом РФФ № 14-11-00079.

Список литературы:

1. *Chebotarev A.Y., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E.* Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer // *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis* 2017.V. 51. № 6. P. 2511-2519.
2. *Chebotarev A.Y., Grenkin G.V., Kovtanyuk A.E., Botkin N.D., Hoffmann K.-H.* Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange // *J. Math. Anal. Appl.* 460 (2018) 737-744.

ТЕЧЕНИЯ С КОНТАКТНЫМ РАЗРЫВОМ ОКОЛО ВРАЩАЮЩИХСЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Ю.Д. Шевелев, Ф.А. Максимов

Институт автоматизации проектирования РАН, shevelev@icad.org.ru

Приведены результаты расчета течений вязкого газа между вращающимися цилиндрами в двух- и трехмерной постановке и между вращающимися дисками. При малых числах Рейнольдса Re течение регулярное и имеет осесимметричный характер. При увеличении Re течение становится нерегулярным из-за неустойчивости границы, по сторонам которой разная скорость. При разрушении разрыва течение имеет признаки турбулентности.

На рис.1 приведены примеры течения между дисками. Нижний диск состоит из подвижной части радиусом $R=1$, вращающейся относительно вертикальной оси с угловой скоростью ω , и неподвижной части $2 \geq R > 1$. Другие поверхности неподвижны. Расстояние между дисками $\Delta=0.2R$. Число $Re=\omega R^2/\nu$, где ν - коэффициент вязкости. При малых Re на внешней стороне вращающейся части образуется течение вверх, а над вращающейся частью – вниз. На рис.1 представлено распределение вертикальной скорости в среднем сечении между дисками при $Re=750$ и 1000 . При $Re=750$ течение осесимметрично, при $Re=1000$ осесимметричный характер разрушается с образованием шестиугольника. В зависимости от параметров задачи (Re , Δ) возможно образование различных правильных многоугольников. Около сторон многоугольника реализуются локальные максимумы давления.

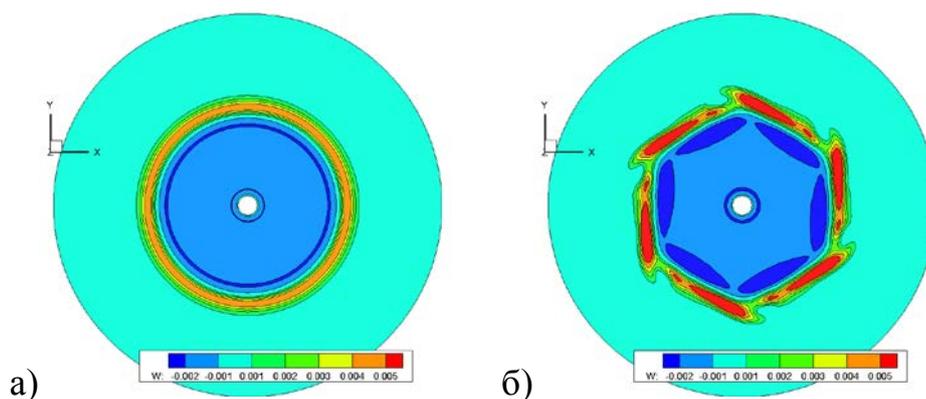


Рис. 1 Распределение скорости в сечении. $Re=750$ (а), 1000 (б)

Образование аналогичных течений наблюдается в экспериментальных исследованиях [1], в полярных областях Сатурна. Расчеты проводились на МВС-100К МСЦ РАН.

Список литературы:

1. Алексеев В.В., Киселева С.В., Ланно С.С. Лабораторные модели физических процессов в атмосфере и океане. – М.: Наука, 2005.

ОПЫТ ПРИМЕНЕНИЯ АЛГОРИТМА УСКОРЕНИЯ РАСЧЕТОВ НАСЫЩЕННОСТИ НА НЕРАВНОМЕРНЫХ СЕТКАХ

Д.В. Шевченко^{1,2}, А.И. Шангараева²

¹Казанский инновационный университет им. В.Г. Тимирязова, *dv@ieml.ru*,

²Казанский (Приволжский) федеральный университет,
aishangaraeva@gmail.com

При численном моделировании разработки нефтяных месторождений одной из задач является расчет поля нефтенасыщенности в пласте. Для решения этой задачи используются явные и неявные расчетные схемы. Достоинствами явных схем являются легкость реализации и быстрота модификации под любое изменение модели для учета дополнительных факторов. Основной недостаток – ограничение на расчетный шаг по времени и, как следствие, значительное время расчетов. Данный недостаток становится еще более значимым при необходимости измельчения расчетных сеток, особенно в окрестности скважин с высокими скоростями потоков пластовых флюидов.

В данной работе приводится опыт распространения метода ускорения расчетов по явной схеме с неоднородным шагом по времени для локального удовлетворения условия Куранта [1] на неравномерные сетки, измельченные в окрестностях скважин. Основной идеей подхода является использование в ячейках шага по времени, 2^n -кратного минимальному: $\Delta t_i = 2^n \cdot \Delta t_{\min}$. При этом пересчет переносимой величины в каждой ячейке организуется со своим шагом один раз в 2^n шагов. Такая организация расчетов позволяет гарантировать «вложенность» расчетных периодов соседних ячеек и обеспечивает консервативность схемы.

В работе алгоритм ускорения применен на регулярных сетках, бинарно измельченных в окрестностях скважин. При определении кратности увеличения локального расчетного шага по времени учитывались как размеры сетки, так и динамически изменяемые скорости потоков. Проведенные расчеты показали существенное уменьшение времени расчетов относительно схем с использованием постоянного временного шага. Заметный выигрыш достигается даже по сравнению с использованием «стационарных» неоднородных шагов по времени – зависящих только от размеров сетки.

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной в рамках государственной поддержки Казанского (Приволжского) федерального университета в целях повышения его конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров

Список литературы:

1. *Shangaraeva A.I., Shevchenko D.V. Speed up of the oil saturation numerical algorithm for the plane-parallel filtration // Applied Mathematical Sciences. 2015. V. 9. N 149-150. P. 7467-7474.*

ПРИБЛИЖЕНИЕ ВПЕРЕД-НАЗАД УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ

В.М. Шмаков

Российский федеральный ядерный центр – ВНИИТФ

Существует весьма малочисленный список проблем, для которых удается найти точное решение уравнение переноса нейтронов. В подавляющем большинстве случаев уравнение переноса приходится решать либо приближено, либо численно. Однако, одной формулы бывает достаточно для замены обширных таблиц, полученных численными методами. К тому же аналитические выражения удобны для анализа решений и понимания влияния тех или иных параметров задачи на характеристики исследуемых объектов.

Приближением *вперед-назад* является простейшей моделью переноса нейтронов. Приближение позволяет получать аналитические решения многих типичных задач теории переноса.

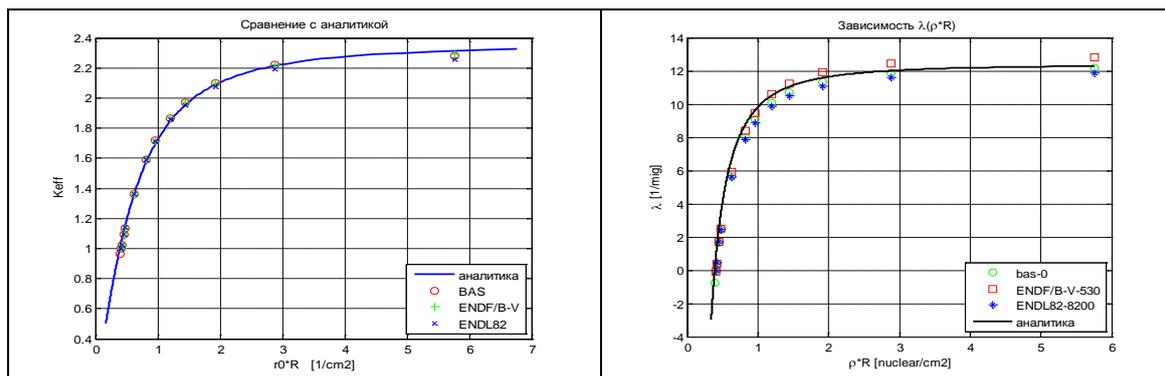
Модель переноса в приближении *вперед-назад* абсолютно точно реализуется в методах Монте-Карло и, следовательно, позволяет обеспечить программы Монте-Карло аналитическими тестами.

Выделим три основных момента, заложенных в приближение *вперед-назад*. Это переход к одноклассовому описанию взаимодействия нейтронов с веществом. Второй момент- это переход к одномерной геометрии. И третий шаг - это ограничение на возможные направления движения нейтронов, что собственно и является приближением *вперед-назад*.

Договоримся, что в одномерных геометриях (плоская, цилиндрическая и сферическая) в приближение *вперед-назад* нейтронам разрешено двигаться только в двух направлениях вдоль некоторых прямых линий. Для плоской геометрии этими линиями являются нормали к поверхности плоскости. Для цилиндрической геометрии – это нормали к поверхности цилиндра. Для сферической геометрии – это нормали к поверхности сферы. Те же ограничения на направление движения нейтронов распространяются и на источник.

Решение уравнения переноса ищется в виде суперпозиции потоков нейтронов, движущихся от центра и движущихся к центру шара. В результате ряда преобразований получается система дифференциальных уравнений для потока и тока нейтронов, эквивалентная начальному уравнению переноса.

На рисунках ниже приведено сравнение аналитики и расчетов Монте-Карло для шаров из ^{235}U .



В докладе:

- получены аналитические решения задач на собственные значения – эффективный коэффициент размножения нейтронов k_{eff} , интенсивность размножения нейтронов λ и их собственные функции;
- проведено сравнение аналитических решений в расчетах Монте-Карло с одногрупповыми и спектральными константами ENDF/B-V и ENDL-82.

Список литературы:

1. Перенос радиации в рассеивающих и поглощающих атмосферах. Под редакцией Жаклин Ленобль. Ленинград, Гидрометеостандарт 1990г.
2. В. М. Шмаков. Приближение «вперед-назад». Нейтроны. Забабахинские научные чтения: сборник материалов XI Международной конференции 16-20 апреля 2012.-Снежинск: Издательство РФЯЦ-ВНИИТФ.
3. В. М. Шмаков. Приближение вперед-назад в теории переноса нейтронов//. ВАНТ. Сер. Теоретическая и прикладная физика. 2016. Вып.2. С. 28-40.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕКТОРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ В ОБЛАСТЯХ С МИКРОВКЛЮЧЕНИЯМИ НА ПОЛИЭДРАЛЬНЫХ НОСИТЕЛЯХ

Э.П. Шурина^{1,2,3}, Д.В. Добролюбова^{1,2,3}, Е.И. Штанько^{2,3}

¹Новосибирский государственный технический университет,

²Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН,

³Новосибирский государственный университет, mik_kat@ngs.ru

Широкий класс прикладных исследований связан с моделированием физических процессов в сложных областях с большим количеством внутренних криволинейных границ и высокой контрастностью электрофизических характеристик отдельных подобластей. Аналитические подходы в таких расчетных областях зачастую не применимы. Основной проблемой численных методов при решении данного класса задач является резкий рост сеточной дискретизации расчетных областей. Для преодоления данной проблемы разрабатываются различные вычислительные схемы на базе неконформных,

многомасштабных и бессеточных модификаций конечноэлементных и конечноразностных методов, метода моментов, и др.

В данной работе предлагается вычислительная схема, реализованная в рамках конечноэлементной многомасштабной идеологии на полиэдральных носителях [1] в качестве макроэлементов. Особенность решения задач электромагнетизма в естественных переменных в трехмерных областях заключается в необходимости выполнять моделирование в векторных функциональных пространствах с частичной непрерывностью, что необходимо учитывать при построении функций формы и выборе процедуры «сшивки».

Работа выполнена при поддержке комплексной программы фундаментальных исследований СО РАН «Междисциплинарные интеграционные исследования» на 2018-2020 по теме «Экспериментальные исследования и математическое моделирование нативных и инженерных объектов с фазоизменяемыми материалами» и программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 27 «Фундаментальные проблемы решения сложных практических задач с помощью суперкомпьютеров».

Список литературы:

1. Шурина Э.П., Добролюбова Д.В., Штанько Е.И. Специальные процедуры для работы с объектами со сложной внутренней структурой по стеку КТ-сканов // Cloud of Science. 2018. Т.5. № 1. С. 40-58.

**ПРИМЕНЕНИЕ СОВРЕМЕННЫХ НЕКОНФОРМНЫХ
МНОГОМАСШТАБНЫХ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ
РЕШЕНИЯ МНОГОФИЗИЧНЫХ ЗАДАЧ**

Э.П. Шурина^{1,2,3}

¹*Новосибирский государственный технический университет,*

²*Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН,*

³*Новосибирский государственный университет, mik_kat@ngs.ru*

По своей природе все научные и инженерные задачи – многомасштабные и многофизичные. Основная идея multiscale-методов (многомасштабных методов) – создание комбинированных макроскопических-микроскопических вычислительных методов, которые будут значительно эффективней, нежели методы решения полной микроскопической задачи, и в то же время позволят получить больше достоверной информации, чем при решении проблемы только на макроскопическом уровне. Идея multiscale-подхода в численных методах уже достаточно давно применялась в таких методах как multi-grid, multipole и методе адаптивного сеточного refinement'a. Различие между классическим multiscale методами, такими как multi-grid, и новыми multiscale методами заключается в следующем: традиционные многомасштабные методы – это, как правило, решатели, настроенные на микро-масштаб. Их цель – получить

возможно более точное решение микромасштабной проблемы, и, естественно, вычислительные затраты этих методов по объему сравнимы с вычислительными затратами полных микромасштабных решателей.

Для решения многофизических проблем в геометрически многомасштабных областях необходимо разрабатывать единую вычислительную платформу. Эффективные вычислительные схемы решения многофизических и многомасштабных задач успешно реализуются на базе современных конформных и неконформных конечноэлементных методов.

В докладе анализируются современные неконформные конечноэлементные методы: виртуальный МКЭ, разрывный метод Галеркина и современные многомасштабные методы: гетерогенный МКЭ, ММКЭ. На примере решения прикладных задач определена общая идеология построения вычислительных схем для решения задач электромагнетизма, просачивания, термоупругой деформации, движения жидкости. В докладе рассмотрена следующая концепция численной реализации многофизической задачи: 1) применение неконформного гетерогенного многомасштабного метода конечных элементов на полиэдральных трехмерных носителях в пространстве $H(grad)$ для решения задачи упругости в пористых и трещиноватых средах при наличии внешнего воздействия и для моделирования процесса распространения тепла в матрице; 2) применение конформного стабилизированного векторного метода конечных элементов в пространстве $H(div)$ для решения задачи моделирования движения флюида в трещинах (порах); 3) применение неконформного многомасштабного разрывного метода Галеркина для решения задачи теплообмена в жидкой фазе в пространстве L_2 .

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А		Долголева Г.В.	41,78,84
Абделхафиз М.А.	93	Долгун А.А.	42
Агеева Ю.А.	12	Дородницын В.А.	50
Александров А.В.	13	Дородницын Л.В.	13
Алексеев А.К.	14	Дубень А.П.	13
Андреев С.С.	15	Дубовик А.О.	33
Аракчеев А.С.	69	Дудникова Г.И.	18
Атауллаханов Ф.И.	59	Дудникова Т.В.	43
Афендикова Н.Г.	16	Дьяченко А.В.	44
Б		Е	
Бабаков А.В.	17	Ефимов С.С.	85
Балабина Т.Ю.	17	Ефимова А.А.	18
Баутин С.П.	12, 81	З	
Берендеев Е.А.	18	Забродина Е.А.	45
Блинков Ю.А.	19, 20, 35	Зайцев Н.А.	46
Богатырев А.Б.	21	Зеленский Д.К.	28
Бондарев А.Е.	14	Злотник А. А.	47
Боронина М.А.	34	И	
Бочев М.А.	22	Иванов П.С.	59
ван Беверн Г.А.	44	Изгородин В.М.	27
Быков Н.В.	23	Истомина М.А.	48
Быковских Д.А.	24	Иткина Н.Б.	71
В		К	
Варин В. П.	25	Калманович В.В.	49
Варфоломеев Д.А.	26	Капцов Е.И.	50
Веселова Е.А.	27, 28	Карпов С.А.	79
Волков Р.Е.	74	Ключинский Д.В.	37
Вшивков В.А.	34	Колесников И.Ю.	51
Г		Коптев А.В.	52
Гавриков М.Б.	30	Костоглотов А.А.	54
Галкин В.А.	24, 31, 33	Котельникова М.С.	87
Генрих Е.А.	34	Краснов М.М.	55
Гердт В.П.	19, 20, 35	Кривов М.А.	58, 59
Гладких В.С.	36	Криксин Ю.А.	60
Говорухин В.Н.	36, 91	Критский Б.В.	46
Годунов С.К.	37, 38	Кудряшов Е.А.	17
Гордин В.А.	39	Куликова Л.И.	82
Губин М.Ю.	82	Кутищева А.Ю.	61
Д		Кучугов П.А.	60
Дбар С.А.	15	Л	
Дерюгин Ю.Н.	17, 27, 28	Ладонкина М.Е.	60
Дерябкин И. В.	54	Лазарева Г.Г.	69
Добролюбова Д.В.	98	Лапик М.А.	62

Лапонин В.С.	63	Старченко С.В.	86,87, 88
Лацис А.О.	15	Степин Е.В.	90
Левченко В.Д.	64	Степович М.А.	49
Ломоносов Т.А.	47		
Луцкий А.Е.	65	Т	
Лысов В.Г.	67	Таюрский А.А.	30
		Тихонов Д.А.	82
М		Тишкин В.Ф.	60
Максимов Ф.А.	95	Туляков Д.Н.	62
Максимова А.Г.	69		
Манаенкова О.Н.	54	Ф	
Марков С.И.	71	Филимонова А.М.	91
Мариненко А.В.	70	Фортова С.В.	37,38
Меньшов И.С.	72		
Михайлов Д.Н.	73	Х	
Мутовкин Н.В.	73	Ханхасаева Я.В.	65
Н		Ц	
Неклюдова О.А.	60	Цветова Е.А.	92
		Цибулин В.Г.	93
О			
Обухов А.Г.	74	Ч	
Оленченко В.В.	70	Чеботарев А.Ю.	94
Опрышко А.Ф.	75		
		Ш	
П		Шамолин М.В.	38
Павлухин П.В.	72	Шангараева А.И.	96
Панкратов И.А.	20	Шевелев Ю.Д.	95
Пененко В.В.	75	Шевченко Д.В.	96
Переварюха А.Ю.	76	Шевяков А.Ф.	50
Петухов А.В.	36	Шепелев В.В.	38
Пикулин С.В.	77	Шмаков В.М.	97
Плоткина Е.А.	15	Штанько Е.И.	98
Пономарев И.В.	78	Шурина Э.П.	98, 99
Потапенко И.Ф.	79		
Потапов И. И.	80	Э	
		Эпов М. И.	70
Р		Я	
Родина Е.А.	81	Якимова М.Н.	26
Руднев В.Р.	82	Яковлева С.В.	88
Рыков Ю.Г.	83		
С			
Савенкова Н.П.	63		
Сарин А.А.	84		
Серегина Е.В.	49		
Сидоренко В.В.	85		
Снигур К.С.	80		
Соломатина Е.Ю.	27		
Софронов И.Л.	73		

Научное издание

Редакция и компьютерная подготовка к изданию
– А.Л. Афендииков, Г.В. Долголева, А.В. Дьяченко, В.Т. Жуков,
В.Г. Лысов, Н.Д. Новикова, Ю.Г. Рыков

Отпечатано с оригинал–макета, изготовленного
в Институте прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН

