Институт прикладной математики
им. М.В.Келдыша РАН (Москва)

Южно-Российский региональный центр
информатизации ЮФУ (Ростов-на-Дону)

Московский государственный университет
им. М.В.Ломоносова (Москва)

XVII ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ "ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И КОНСТРУИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

посвященная памяти К.И. Бабенко

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Дюрсо, 2008

Оргкомитет XVII Конференции выражает признательность Российскому фонду фундаментальных исследований, при поддержке которого состоялось это мероприятие (грант 08-01-06103г)

УДК.519.6

Тезисы докладов XVII Всероссийской конференции "Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов и решение задач математической физики с приложением к многопроцессорным системам", посвященной памяти К.И. Бабенко (Дюрсо, 16-20 сентября, 2008).

АННОТАЦИЯ

Конференция включает лекции и доклады по вычислительной математике, аэро-гидродинамике, молекулярной биологии. Обсуждаются направления развития алгоритмов математической физики и параллельных вычислительных технологий. Также рассматриваются теоретические вопросы дифференциальных уравнений, точные и асимптотические представления решений краевых задач и динамических систем.

Стр. 90.

Proceedings of the XVII All-Russian Conference "Theoretical bases and generation of numerical algorithms to solve mathematical physics problems with application to multiprocessor systems", devoted to K.I.Babenko (Durso, 16-20 September, 2008)

ABSTRACT

The conference includes lectures and reports on computational mathematics, aero-hydrodynamic, molecular biology. The development of mathematical physics algorithms and the parallel computational technologies are discussed. The theoretical problems on differential equations, exact and asymptotic solutions of boundary problems are considered.

О ВАРИАЦИОННОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ ГЕКСАЭДРАЛЬНЫХ АДАПТИВНЫХ СЕТОК

Азаренок Б.Н.

Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН, Москва

Представлен вариационный метод построения пространственных адаптивных разностных сеток, составленных из гексаэдральных ячеек[1]. Сетка строится с помощью отображения параметрической области с заданной кубической сеткой на многообразие в пространстве, переменными которого являются обычные пространственные координаты в физической области и компоненты мониторной вектор-функции. Проекция квазиравномерной сетки, построенной в многообразии, на физическую область является адаптивной сеткой. Для дополнительного управления формой ячеек сетки вводится еще одно отображение. Функции, осуществляющие отображение находятся посредством минимизации функционала. Функционал зависит от метрических элементов двух метрик. Одна мониторная метрика порождается криволинейной сеткой, генерируемой в многообразии, а вторая управляющая метрика отвечает за дополнительное управление формой ячеек конструируемой сетки. Бесконечный барьер на границе множества невырожденных сеток, состоящих из 12-гранных ячеек, препятствует вырождению сетки в процессе ее построения. При этом соответствующие им гексаэдральные сетки также получаются невырожденными. Приводятся примеры адаптивных сеток.

Работа выполнена при финансовой поддержке ОМН РАН (программа № 3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азаренок Б.Н.* Вариационный метод построения пространственных адаптивных сеток//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 5. С. 100–119.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЙ С НЕУСТОЙЧИВОСТЯМИ КОНТАКТНЫХ РАЗРЫВОВ И ФЛУКТУАЦИЯМИ ПАРАМЕТРОВ

Азарова О.А.

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва

Приводятся результаты моделирования пульсационных течений с неустойчивостями контактных разрывов и взаимодействия ударной волны с турбулентно-подобными флуктуациями с использованием разностных схем на минимальном шаблоне. В первой части работы представлен один вариант разностной схемы из семейства схем на минимальном шаблоне (см. [1]) для расчета двумерных осесимметричных течений газа. Схема является явной, консервативной и имеет второй порядок точности по пространству и времени.

Приводятся результаты моделирования взаимодействия бесконечного разогретого разреженного канала с цилиндрическим ударным слоем на основе системы уравнений Эйлера (см. [2]). Исследованы детали течения, сопутствующие перестройке структуры обтекания, такие как развитие стохастических пульсационных режимов, возникновение неустойчивостей контактных разрывов, подобных неустойчивости Рихтмайера-Мешкова и сдвиговой (shear-layer) неустойчивости тангенциального разрыва Кельвина-Гельмгольца, а также явления турбулентного перемешивания и турбулизации передних отрывных областей течения (см. [3]). Рассматриваются цилиндрические тела и тела с полостью. Число Маха набегающего потока равнялось 1.9 и 3. Приведены механизмы пульсаций и зарождения неустойчивостей. Показано, что пульсации потока обусловлены колебаниями вертикально расположенного контактного разрыва внутри ударного слоя.

Исследованы траектории центров зарождающихся вихрей и показано, что возможны два типа их динамики. При запирании потока из горячей области контактным разрывом вихри возвращаются в отрывную зону и, взаимодействуя с телом, генерируют турбулентно-подобные флуктуации; при наличии потока вихри уносятся вместе с ним из расчетной области. Показано, что при малых радиусах источника внутри ударного слоя образуется горячий канал, и возвратные вихри оказываются достаточно сильными для генерации турбулентного перемешивания на границах этого канала. Исследовано формирование основных областей течения, включая зону отрыва потока, и динамика определяющих параметров процесса. Предложен механизм импульсного поведения параметров торможения, связанный с кумуляцией нормальных к торцу тела ударных волн.

Во второй части работы представлены результаты прямого численного моделирования динамики статистических характеристик развитой сжимаемой турбулентности при взаимодействии с первоначально плоской ударной волной. Используется модель сжимаемой турбулентности, основанная на синтезе численного решения уравнений Эйлера и прямого статистического моделирования [4]. Генерация турбулентных пульсаций производится в ограниченной пространственной области с помощью прямого расчета стохастических полей параметров газа (см. [5]).

Рассматривается изотропная изоэнтропическая хорошо развитая (well developed) турбулентность, стабилизированная во времени. Величина флуктуаций плотности и давления соответствовала соленоидальному типу изоэнтропической турбулентности из [6]. Диапазон чисел Маха ударной волны - от 1.2 до 3. Исследованы коэффициенты усиления флуктуаций термодинамических параметров, скорости, завихренности, а также усиления кинетической энергии флуктуаций. Исследованы также взаимные корреляции флуктуаций параметров турбулентного газа перед ударной волной и за ней. Проведено сравнение с результатами DNS-моделирования и LIA-анализа и исследованы границы применимости используемой модели.

Отдельные разделы работы финансировались EOARD (Проект МНТС N 3058р) и РФФИ (Проекты N 01-01-00807, 00-15-96124).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *О.М.Белоцерковский, В.Г. Грудницкий, Ю.А. Прохорчук.* Разностная схема второго порядка точности на минимальном шаблоне для гиперболических уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1983. Т. 23. N 1. С. 119–126.
2. *Yu. F. Kolesnichenko, V.G. Brovkin, O.A. Azarova, V.G.Grudnitsky et al.* Microwave Energy Release Regimes for Drag Reduction in Supersonic Flows // Paper AIAA–2002–0353. P. 1–13.
3. *Farnaz Farzan, Doyle Knight, Olga Azarova, Yuri Kolesnichenko.* Interaction of Microwave Filament and Blunt Body in Supersonic Flow // Paper AIAA–2008–1356. P. 1–24.
4. *О.А. Азарова.* Численное моделирование взаимодействия турбулентности с ударной волной в потоке сжимаемого газа. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2004. Т. 44. N 3. С. 543–552.
5. *О.А. Азарова, В.Е. Яницкий.* Численное исследование статистических характеристик пульсаций плотности в потоке с ударной волной // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1998. Т. 38. N 10. С. 1751–1757.
6. *Jamme S., Cazalbou J.- B., Torres F., Chassaing P.* Direct Numerical Simulation of the Interaction Between a Shock Wave and Various Types of Isotropic Turbulence // Flow, Turbulence and Combustion. 2002. V. 68. P. 227–268.

МАКЕТ ГИБРИДНОГО СУПЕРКОМПЬЮТЕРА МВС-ЭКСПРЕСС

Андреев С.С., Давыдов А.А., Дбар С.А., Карагичев А.Б., Лацис А.О., Плоткина Е.А.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша, Москва

Способ построения высокопроизводительных вычислителей путем объединения большого числа универсальных процессоров сравнительно слабыми каналами связи был основным на протяжении более 20 лет. Сегодня рост числа транзисторов на процессорном кристалле привел к тому, что способ это в качестве основного изжил себя. Построенные таким путем вычислители обладают большим количеством «узких мест» системного характера, их к.п.д.

на реальных задачах уже составляет первые проценты и продолжает быстро падать по мере совершенствования элементной базы.

Все это вынуждает разработчиков высокопроизводительных вычислительных систем искать принципиально новые способы организации вычислителя, то есть разрабатывать новые архитектуры суперкомпьютеров.

Главным узким местом традиционной архитектуры является коммуникационная система в самом широком смысле этого слова. К.п.д. машины падает именно тогда, когда растет доля времени, затрачиваемая не на вычисления, а на перемещение данных между памятью и собственно вычислительными устройствами. В традиционных суперкомпьютерах система коммуникаций между вычислительными узлами традиционно была объектом повышенного внимания со стороны как разработчиков, так и пользователей. Необходимость перехода на новые архитектуры возникла тогда, когда перестала справляться со своими задачами уже система внутренних коммуникаций между процессором и памятью в пределах одного вычислительного узла. Произошло это на наших глазах, и стало очевидным примерно 2 года назад.

В рамках кластерного подхода к построению суперкомпьютера, означающего максимально возможное использование готовых компонентов серийного выпуска, оптимизированные в коммуникационном отношении машины приобрели форму гибридных суперкомпьютеров. Такие машины строятся на базе вычислительных узлов, каждый из которых оснащается универсальным компьютером с небольшим числом процессорных ядер. Однако, в отличие от традиционного случая, как система коммуникаций между узлами, так и система коммуникаций внутри узла, строятся на совершенно новых технических и архитектурных принципах.

Для связи узлов друг с другом применяются коммутаторы взаимного прямого доступа в память, с очень низкими показателями задержки при обращении к сети.

Внутри узла универсальный компьютер снабжается тем или иным вариантом не-фоннеймановского ускорителя, система передачи данных внутри которого принципиально отличается от системы передачи данных внутри «обычного» процессора. Например, в качестве такого ускорителя может выступать векторный мультипроцессор с глубоко расслоенной оперативной памятью, обеспечивающей одновременную работу нескольких сотен арифметических устройств. Ускоритель связан с универсальным процессором предельно широким каналом с очень низкой задержкой на обращение.

Конечной целью построения таких машин является многократное повышение к.п.д. вычислительного оборудования на реальных задачах. Помимо изготовления самого оборудования гибридного суперкомпьютера, для достижения этой цели потребуется разработка совершенно новых средств программирования. Эта задача должна быть решена на практике в ближайшее время, совместными усилиями разработчиков и первых пользователей новых машин.

В ИПМ РАН построен и передан в опытную эксплуатацию макет гибридного суперкомпьютера из 6 узлов, с пиковой производительностью около полутора терафлопс. В докладе рассматривается устройство этого макета, а также приводятся соображения по конкретному порядку его развития и освоения пользователями на ближайший год. Особое внимание будет уделено рассмотрению и обоснованию конкретного плана разработки первых версий программного обеспечения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 08-07-00086-а.

ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРИ НАЛИЧИИ ИМПУЛЬСНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ

Арутюнов А.В., Карамзин Д.Ю., Фернандо Перейра
РУДН, Москва
Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН, Москва
Университет Порто, Порто, Португалия

В настоящей работе изучается Принцип Максимума Понтрягина (ПМ) [1] для задачи оптимального импульсного управления со смешанными ограничениями. Смешанные ограничения в обычных задачах оптимального управления хорошо изучены (см. книжки [2, 3] и библиографию, цитированную в них). В задачах же с импульсными воздействиями смешанные ограничения до настоящего времени не изучались, и нам неизвестны какие-либо содержательные работы на эту тему. В нашей работе мы предлагаем новую постановку задачи и новый подход, рассматривая при этом самый общий не выпуклый случай. Постановка задачи содержит в себе смешанные ограничения, обычные (регулярные) и импульсные управления. При этом импульсное и регулярное управления не являются независимыми, но связаны некоторым соотношением.

Более точно, в работе представлено простое и полное доказательство ПМ для импульсной задачи управления со смешанными ограничениями обобщенного геометрического типа $R(x, u, t) \in C$, где множество C выпукло и замкнуто. При этом никаких предположений выпуклости относительно множества скоростей задачи не делается. Доказательство основного результата (Теорема 1) основано на вариационном принципе Экланда [4]. В Теореме 1 мы принимаем традиционную концепцию глобальной регулярности смешанных ограничений [2]. Однако уже в Теореме 2, при дополнительных предположениях дифференцируемости по времени мы доказываем усиленный ПМ, где условия регулярности смешанных ограничений значительно ослабляются. Условие максимума в Теореме 2 уже не является традиционным, а максимум берется по замыканию регулярных точек. Доказательство Теоремы 2 основано на так называемом методе разрывной замены времени. В Теореме 3 получено классическое условие максимума, как и в Теореме 1, однако при слабых предположениях регулярности смешанных ограничений.

Исследование поддержано РФФИ, проект N 08-01-00450, и FCT (Португалия), PTDC/EEA-ACR/75242/2006, SFRH/BPD/26231/2006.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко.* Математическая теория оптимальных процессов, Москва: Наука (1983).
2. *A.V. Arutyunov.* Optimality conditions: Abnormal and Degenerate Problems. Mathematics and Its Application. Kluwer Academic Publisher, 2000.
3. *А.А. Милютин.* Принцип максимума в общей задаче оптимального управления. Москва, Физматлит, 2001.
4. *I. Ekeland.* On the Variational Principle. J. Math. Anal. Appl. 1974, 47, 324-353.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ГОРЕНИЯ МИШЕНИ ДЛЯ УСТАНОВКИ „ИСКРА-6“

Атаманенко В.Д., Долголева Г.В., Щербаков В.А.
РФЯЦ-ВНИИЭФ, Саров

В докладе излагаются результаты численного исследования горения лазерной мишени, предлагаемой для установки “ИСКРА-6” [1]. Мишень состоит из трёх слоёв: DT-газ, DT-лёд и оболочка из бериллия с добавлением меди. Рассматривается влияние на горение мишени плотности DT-газа и количества меди в бериллии. Варьировалась геометрия мишени. Рассматривались разные модели расчета переноса излучения. Исследовалось влияние переноса α-частиц. Проведены расчёты на сходимость. Планируется провести расчёт с турбулентным перемешиванием. Исследования работы лазерной мишени базируются на расчётах по программе СНД [2], функциональные возможности которой позволяют адекватно описывать сложную физику лазерных мишеней.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карлыханов Н.Г., Лыков В.А., Тимакова М.С., Чижков М.Н.* Результаты одномерных расчётов по выбору мишени с непрямым воздействием

для зажигания на лазерной установке "ИСКРА-6"// Письма в ЖЭТФ. 2004. Вып.1. Т. 79. С.30—33.

2. *Долголева Г.В.* Методика расчета движения двухтемпературного излучающего газа (СНД) // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики. 1983. Вып. 2(13). С.29—33.

ОСОБЕННОСТИ ПОГЛОЩЕНИЯ ЭНЕРГИИ МИШЕНЬЮ ДЛЯ УСТАНОВКИ "ИСКРА-6"

Атаманенко В.Д., Долголёва Г.В., Щербаков В.А.

РФЯЦ-ВНИИЭФ, Саров

Анализируются особенности поглощения энергии мишенью [1] непрямого действия для установки "ИСКРА-6", полученные в расчётах по программе СНД [2].

Криогенная сферическая мишень состоит из Be-аблятора с примесью меди ($\alpha_{Cu} = 2\%$ и 8%), слоя DT-льда и остаточного DT-газа во внутренней полости мишени. На мишень падает профилированное рентгеновское излучение с пиком температуры $T_{max} \approx 0,35$кэВ.

Особенности поглощения энергии:

- поглощение энергии примерно одинаково для $\alpha_{Cu} = 2\%$ и 8%,
- прогревается практически весь аблятор, что негативно сказывается на работоспособности мишени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карлыханов Н.Г., Лыков В.А., Тимакова М.С., Чижков М.Н.* Результаты одномерных расчётов по выбору мишени с непрямым воздействием для зажигания на лазерной установке «ИСКРА-6». Письма в ЖЭТФ, том 79, вып.1, с.30-33, 2004
2. *Долголева Г.В.* Методика расчета движения двухтемпературного излучающего газа (СНД) // ВАНТ. Сер. Методики и программы численного решения задач математической физики, вып.2(13), с.29-33, 1983

ПОСТРОЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ УПРУГИХ СРЕД ДЛЯ СЛОИСТЫХ СТРУКТУР

Ахметгалиев Э.А., Софронов И.Л.
Московский физико-технический институт, ГУ
Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва

Расчет распространения упругих волн в тонкослоистых структурах (например, при численном моделировании акустического каротажа) путем прямого моделирования слоистой среды может приводить к большим вычислительным затратам. Одним из возможных путей решения проблемы является построение так называемых эффективных сред с непрерывными зависимостями упругих параметров. Очевидно, что характеристики решения будут зависеть от того, используется ли в модели сама слоистая структура, или ее эффективный аналог. Поэтому, кроме поиска процедур осреднения параметров слоистой среды важной задачей является также поиск критерия оценки эффективности этих осреднений, основанного на определении «близости» полученных решений.

Для моделирования распространения волн в вертикальных трансверсально изотропных слоистых средах мы разработали и реализовали двумерные алгоритмы второго порядка точности на основе конечных разностей в rz-координатах. В докладе приводятся результаты численных исследований по известной процедуре осреднения Бэкуса [1], основанной на предположении, что длины упругих волн существенно больше характерных размеров слоистости. Показано, что, например, в приложении к проблеме акустического каротажа она является неэффективной. В то же время, мы предлагаем другие процедуры осреднения, для которых численные эксперименты дали более обнадеживающие результаты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Backus G.E.* Long-Wave Elastic Anisotropy Produced by Horizontal Layering // J. Geophys. Res., 1962, V. 67, № 11.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИДЕНТИФИКАЦИИ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ И ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРОБЛЕМЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ

Ахтямов А.М.
ГОУ ВПО Башкирский государственный университет, Уфа,
AkhtyamovAM@mail.ru

Можно по собственным частотам колебаний стержня определить, как закреплены концы стержня? Закреплены они на шарнирах или на пружинках, заделаны или свободны? Можно ли по собственным частотам колебаний определить, как закреплены другие механические системы, такие как пластина, мембрана или оболочка? Сколько собственных частот нам для этого нужно знать? Именно эти вопросы о возможностях диагностирования закреплений по звучанию лежат в основе исследований по идентификации краевых условий по собственным частотам колебаний. По этой теме опубликовано значительное число работ. Доказаны теоремы единственности, двойственности и т.п.

Однако некоторые вопросы в этой области остаются невыясненными. При поиске краевых условий возникают проблемы восстановления вектора с точностью до ненулевого множителя. Что понимать под правильностью восстановления вектора с точностью до постоянного ненулевого множителя, если сами координаты вектора находятся с некоторой погрешностью? Когда можно считать некоторые координаты равными нулю? Ответ на этот вопрос автор и попытается найти во время выступления.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Академии наук Республики Башкортостан (гранты 08-01-97026-р_поволжье_а; 08-01-97008-р_поволжье_а; 06-01-00354-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахтямов А. М. Можно ли определить вид закрепления колеблющейся пластины по ее звучанию? // Акустический журнал. 2003, Т. 49. N 3. С. 325–331.
2. Ахтямов А. М., Сафина Г. Ф. Определение виброзащитного закрепления трубопровода // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. N 1. С. 139–147.

АНАЛОГ УСЛОВИЙ ГЮГОНИО ДЛЯ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СРЕДЫ

Баутин С.П.

Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург

Рассматривается модель В.Ф. Куропатенко [1, 2] многокомпонентной среды в случае, когда каждый из N компонентов является политропным газом. Предполагается, что при $x \to \pm\infty$ многокомпонентная среда находится в однородных состояниях со своими постоянными значениями газодинамических параметров, равновесных по скоростям, давлениям и температурам. В случае произвольного числа компонентов для течений, являющихся бегущими волнами, получен аналог условий Гюгонио, с помощью которого по заданным при $x \to +\infty$ параметрам течения и по скорости распространения бегущей волны однозначно определяются параметры течения при $x \to -\infty$. В случае двухкомпонентной среды приведен пример расчета бегущей волны, имеющей при $x \to \pm\infty$ указанные состояния, а в средней части – течения два сглаженных (из-за искусственно введенных вязкости и теплопроводности) сильных разрыва.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 08-01-00052.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Куропатенко В.Ф.* Модель многокомпонентной среды // Доклады Академии наук. 2005. Т. 403. N. 6. С. 761–763.
2. *Баутин С.П.* Скорость звука в многокомпонентной покоящейся среде // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. N. 3. С. 35–44.

К ПРОБЛЕМЕ ПАРАМЕТРОВ ИНТЕГРАЛА КРИСТОФФЕЛЯ — ШВАРЦА

Безродных С.И., Власов В.И.

Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН, Москва

Конформное отображение $w = f(z)$ полуплоскости $\mathbf{H} = \{\mathrm{Im} z > 0\}$ на N–угольник представляется, как известно [1], в виде интеграла Кристоффеля — Шварца $f(z) = C\int^z \prod_{m=1}^N (t - z_m)^{\alpha_m - 1}\, dt$, где $\pi\alpha_k$ — угол при вершине w_k, а z_k — ее прообраз. Поскольку три прообраза могут быть произвольно заданы, то этот интеграл содержит $(N-3)$ неизвестных z_k. Так как предынтегральный множитель C также неизвестен, то всего, следовательно, имеется $(N-2)$ неизвестных параметров. Для их нахождения из геометрических соображений составляется система из $(N-2)$-х уравнений следующего вида: $C\int_{z_k}^{z_{k+1}} \prod_{m=1}^N (t - z_m)^{\alpha_m - 1}\, dt = w_{k+1} - w_k$, в которых правые части известны, а левые выражаются через функцию Лауричеллы $F_D^{(N)}$ — обобщенную гипергеометрическую функцию многих комплексных переменных [2]. Для решения этой системы используются методы типа Ньютона. Чтобы обеспечить их эффективность необходимо, во-первых, обеспечить высокоточное вычисление функции Лауричеллы и, во-вторых, найти хорошее начальное приближение для неизвестных параметров. Обе этих вспомогательных задачи становятся весьма затруднительными при возникновении эффекта кроудинга — резко неравномерном распределении прообразов вершин.

В работе даны методы решения обеих этих задач, для которых ситуация кроудинга является не затрудняющим, как обычно, а благоприятствующим фактором. Методы основаны на результатах работ [3], [4].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 07-01-00500, 07-01-00503, программы №3 ОМН РАН, проект ВЦ РАН "Вычислительные и информационные проблемы научного обеспечения высоких технологий", и программы РАН "Современные проблемы теоретической математики", проект "Оптимизация вычислительных алгоритмов решения задач математической физики".

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Коппенфельс В., Штальман Ф.* Практика конформных отображений. М.: ИЛ, 1963.
2. *Exton H.* Multiple hypregeometric functions and application. N.-Y: Chichester, 1976.
3. *Власов В.И.* Краевые задачи в областях с криволинейной границей. М.: ВЦ АН СССР, 1987.
4. *Безродных С.И., Власов В.И.* Сингулярная задача Римана — Гильберта в сложных областях // Spectral and Evolution Problems. 2006. V. 16. P. 51–61.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СТРУИ С ПРЕГРАДОЙ ПРИ НАЛИЧИИ ГАЗОХОДА

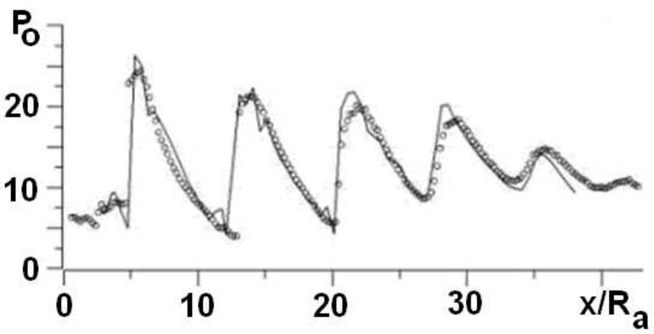
Белошенко Б.Г., Панасенко А.В., Сафронов А.В.
ФГУП Центральный научно-исследовательский институт машиностроения, Королев

Расчет нестационарных струйных течений актуален как при изучении процессов, сопутствующих старту, так и при проблем, связанных с обеспечение безопасности в случае разрыва газопроводящих магистралей.

Математическое моделирование проведено на основе разработанного параллельного комплекса программ, в основе которого лежат модели уравнений Эйлера и Навье-Стокса с разностной аппроксимацией при использовании различных подходов [1, 2]. Рассмотрены случаи истечения типа воздух-воздух и водород-воздух. Проведено сравнение с имеющимися экспериментальными данными, как по структурным элементам течения, так и по распределению параметров вдоль оси струи и по поверхности преграды.

Ниже в качестве примера приведено сравнение зависимостей расчетного и экспериментального значений давления в критической точке от расстояния преграды от среза сопла (эксперимент ЦНИИмаш) при натекании на нее струи с Ма = 4, Pa/Pe = 0.7, To = 300K (сплошная линия расчет, кружки - эксперимент).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 07-01-13505.



СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сафронов А.В.* Разностный метод для уравнений газодинамики из соотношений на разрывах //Математическое моделирование. Том 20, № 2, 2008, с 76-84..
2. *2. Войнович П.А., Жмакин А.И., Киселев А.С., Панасенко А.В., Фурсенко А.А.* О расчете распространения профилированных ударных волн. Препринт № 1426. Ленинград.: ФТИ им. А.Ф. Иоффе АН СССР. 1990. 49 с.

АНАЛИТИЧЕСКИЙ ИНЖЕНЕРНЫЙ МЕТОД РАСЧЁТА УДАРНО-ВОЛНОВЫХ ДАВЛЕНИЙ НА РАКЕТУ-НОСИТЕЛЬ И ПУСКОВОЕ УСТРОЙСТВО ПРИ СТАРТЕ

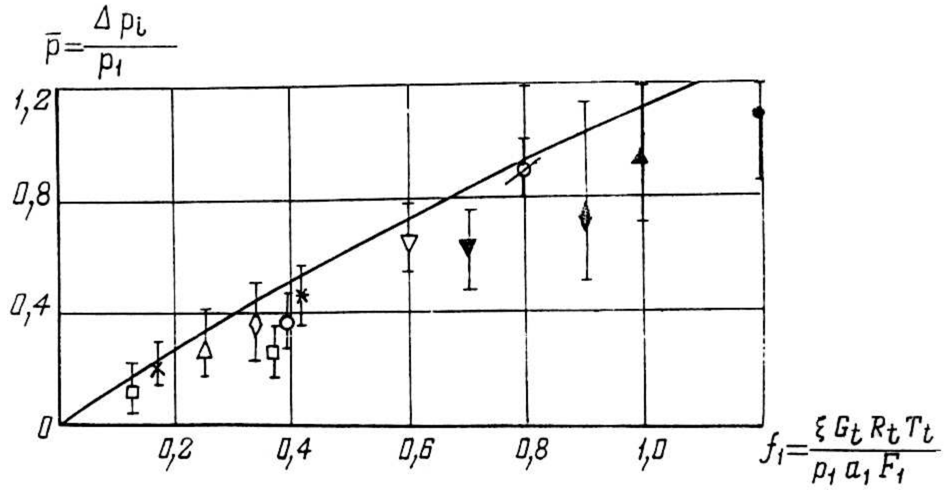
Белошенко Б.Г., Семёнов С.С.

ФГУП Центральный научно-исследовательский институт машиностроения, Королев

В работе приводится аналитический метод расчёта ударно-волновых давлений (УВД), воздействующих на ракету-носитель (РН) и пусковое устройство (ПУ) при старте в период запуска двигательной установки (ДУ). Рассмотрена физическая картина переходного волнового процесса в газоотводных каналах стартового сооружения при запуске ДУ. Неустановившийся сжимаемый поток газа в канале ПУ описывается дифференциальными уравнениями движения в форме Эйлера. Рассмотрено движение ударной волны, сжатого воздуха за ней и продуктов сгорания топлива ДУ в газоходе. Решая систему уравнений для областей горячего и холодного газа, разделённых контактной поверхностью, для заданных начальных и граничных условий, найдено аналитическое решение зависимости интенсивности УВД от определяющих параметров:

$$\frac{P_2}{P_1} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{\gamma_1}(\sqrt{\frac{2}{\gamma+1} * \frac{1+\frac{\gamma_1-1}{2}*(\frac{w_1}{a_1})^2}{(\frac{\xi G(t) R_0 T_0}{P_1 a_1 F_1} - \frac{P_1}{P_2} - \frac{w_1}{a_1})^2}} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2})}$$

Удовлетворительное согласование расчётных и экспериментальных данных, соответствующих различным внешним условиям среды в газоходе, пусковым характеристикам ДУ и различным газодинамическим схемам стартовых устройств. Ниже иллюстрируется возможность исследования УВД с помощью предложенного метода расчёта.



Работа выполнена при поддержке РФФИ проекты: 07-01-13505, 05-08-18034.

О НЕНАСЫЩАЕМЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ

Белых В.Н.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

В теории и практике квадратурных формул до настоящего времени остается существенный пробел. Именно, не решен вопрос о влиянии так называемых аппроксимационных возможностей компакта подынтегральных функций на эффективность и качество производимых с их помощью компьютерных вычислений. По этой причине способность к эффективному использованию экстраординарных “запасов” гладкости подынтегральных функций находится за пределами возможностей существующих типов квадратурных формул. Трудности разрешения указанной проблематики (особенно в многомерном случае [1]) находятся в теории конструктивного приближения функций, которая до сих пор все еще не выстрадала тех прозрений здравого смысла, которые бы обеспечили ей ведущее положение в современной вычислительной практике. Сравнительно просто, хотя и нетривиально, эта проблематика разрешается в одномерном случае.

В докладе на основе математических идей К.И. Бабенко [1] излагаются построенные принципиально новые — *ненасыщаемые* – квадратурные формулы, ликвидирующие указанный пробел в случае отрезка. Их специфическая особенность – отсутствие главного члена погрешности и, как результат, – способность к самосовершенствованию: с ростом числа узлов они автоматически непосредственно в дифференциальной природе подынтегральных функций отслеживают приращение своей практической эффективности. Тем самым большие запасы гладкости подынтегральных функций (к примеру, бесконечная дифференцируемость или аналитичность), обычно находящиеся на периферии насущных интересов компьютерных вычислений, становятся их активным персонажем. Пика же своей практической эффективности – *экспоненциальной сходимости* – эти квадратурные формулы достигают на классах (компактах) C^∞- гладких функций [2].

Изучение построенных квадратур осуществлено с учетом всех этапов современной методологии организации компьютерных вычислений, таких, как выбор узлов, построение коэффициентов, выработка критериев "хорошей" обусловленности, исследование свойств функционала погрешности.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-01-00207) и Заказного Междисциплинарного проекта Президиума СО РАН № 5.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с. (2-е издание: М.; Ижевск: РХД, 2002. 848 с).
2. *Белых В.Н.* О свойствах наилучших приближений C^∞-гладких функций на отрезке вещественной оси (к феномену ненасыщаемости численных методов) // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46. № 3. С. 483–499.

КОНТРОЛЬ ТОЧНОСТИ РАЗДЕЛЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЯТЕН

Бибердорф Э.А.

Институт математики им. С.Л.Соболева, Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск

Рассмотрим разностное уравнение

$$f_0u_k + f_1u_{k+1} + \cdots + f_nu_{k+n} = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, \infty$$

с начальными данными $u_0 = \bar{u}_0,\ u_1 = \bar{u}_1, \ldots, u_n = \bar{u}_n$. Его решение устойчиво, если все корни полинома $f(x) = f_0 + f_1x + \cdots + f_nx^n = 0$ лежат строго внутри единичного круга. Вопрос: как определить, лежат ли все корни $f(x)$ строго внутри единичного круга?

Аналогичная ситуация возникает при исследовании итерационного процесса: $x_n = Ax_{n-1}$. Всем известно, что он сходится, если спектр матрицы A лежит строго внутри единичной окружности. Следующий вопрос: как определить, где находится спектр матрицы A?

Численный ответ на эти и подобные им вопросы осложняется тем обстоятельством, что теоретически собственные значения несимметричных матриц (как и корни полиномов) непрерывно зависят от их коэффициентов, но модуль непрерывности может достигать очень больших величин. И в тех случаях, когда он приближается к $1/\varepsilon_1$, где ε_1 – относительная погрешность единицы в компьютерной арифметике, определение расположения отдельных собственных чисел становится невозможным. По этой причине при численном исследовании спектра несимметричных матриц имеет смысл говорить не о точках спектра, а о пятнах ε-спектра, где ε-спектр – это множество точек, которые являются собственными значениями матрицы $A+B$ с некоторой матрицей B, $\|B\| \le \varepsilon$. Например, у матрицы

$$C = \begin{pmatrix} 289 & 2064 & 336 & 128 & 80 & 32 & 16 \\ 1152 & 30 & 1312 & 512 & 288 & 128 & 32 \\ -29 & -2000 & 756 & 384 & 1008 & 224 & 48 \\ 512 & 128 & 640 & 0 & 640 & 512 & 128 \\ 1053 & 2256 & -504 & -384 & -756 & 800 & 208 \\ -287 & -16 & 1712 & -128 & 1968 & -30 & 2032 \\ -2176 & -287 & -1565 & -512 & -541 & -1152 & -289 \end{pmatrix}$$

известны точные собственные значения: 0, ± 1, ± 2, ± 4, а ее ε-спектр при $\varepsilon \approx 10^{-14}, 10^{-15}$ занимает область равную приблизительно кругу радиуса 8.

Задача о дихотомии спектра – это задача о разделении спектральных пятен. Она формулируется следующим образом: пусть γ – замкнутая кривая на комплексной плоскости, требуется

1) определить, есть на γ точки спектра матрицы A;

2) если на γ отсутствуют точки спектра матрицы A, то требуется оценить расстояние от спектра A до кривой γ;

3) определить инвариантные подпространства матрицы A, отвечающие собственным значениям матрицы, лежащим внутри и вне кривой γ соответственно.

Алгоритм решения этой задачи в случае, когда γ является окружностью, представлен в [1]. Центральная часть алгоритма представляет собой вариант матричной ортогональной прогонки. Таким образом основная особенность алгоритма дихотомии заключается в том, что для решения несимметричной спектральной проблемы применяются ортогональные преобразования и симметрические положительно определенные матрицы. Это делает возможным сопровождение результата выполнения алгоритма оценкой его точности. В процессе исполнения алгоритма вычисляется некая матрица H, чья норма $\|H\|$ является численным критерием качества дихотомии. Через него оценивается близость спектра к кривой γ, точность вычисления соответствующих подпространств, скорость сходимости алгоритма и др.

Случаи, когда γ является прямой или эллипсом, при помощи простых преобразований сводятся к круговой дихотомии (см.[2], [3]).

Дихотомии спектра матрицы может эффективно использоваться, например, при исследовании устойчивости механических систем [4].

Оказывается, указанная техника исследования спектра матрицы подходит для изучения расположения корней полинома и разделения полинома на множители [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ 06-08-00384-а, СО РАН Интеграционный проект № 46, НШ-4299.2008.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Булгаков А.Я., Годунов С.К.* Круговая дихотомия матричного спектра // Сиб. мат. журн. 1988. Т. 29, N. 5, С. 59–70.
2. *Godunov S.K., Sadkane M.* Elliptic Dichotomy of a Matrix Spectrum // Linear Algebra and its Applications 248. 1996. C. 205-232.
3. *Годунов С.К.* Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск. Научная книга. 1997.
4. *Курзин В.Б.* Определение динамических характеристик механических систем методом построения одномерных спектральных портретов матриц // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49. N. 1. С. 104-113.
5. *Бибердорф Э.А.* Критерий дихотомии корней полинома единичной окружностью // Сиб. журн. инд. мат. 2000. Т. 3. N. 1. С. 16-32.

РАСЧЕТ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПЛОСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В РЕАЛЬНОМ ГАЗЕ С ТЕПЛОПРОВОДНОЙ СТЕНКОЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Бобашев С.В.[2], Липницкий Ю.М.[1], Менде Н.П.[2], Панасенко А.В.[1], Попов П.А.[2], Резников Б.И.[2], Сахаров В.А.[2]

[1]*ФГУП Центральный научно-исследовательский институт машиностроения, Королев*

[2]*Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, С.-Петербург*

Одним из приоритетных направлений в настоящее время является развитие наноиндустрии. При разработке технических устройств различного назначения, работающих в наносекундном диапазоне, в ряде случаев требуется величина тепловых потоков, действующих на их элементы.

В ФТИ им. А.Ф. Иоффе РАН на протяжении нескольких лет в экспериментальных исследованиях на ударной трубе [1, 2] используется градиентный датчик теплового потока (ГДТП) на базе анизотропного кристалла висмута [3]. При этом в импульсных процессах длительностью 2 ms, происходящих в ударной трубе, результаты стационарной калибровки ГДТП не могут быть использованы для измерения теплового потока из-за тепловой инерции датчика, связанной с его толщиной 200 μm. Сравнение тепловых потоков, рассчитанных по сигналам ГДТП и датчика ALTP (Atomic Layer Thermopile фирмы «FORTECH HTS GmbH») [4] толщиной 1 μm, показало, что в этом временном интервале различие достаточно велико. Это убедительно свидетельствует о необходимости разработки методов динамической калибровки ГДТП. Подходящим физическим процессом для этого является отражение ударной волны от твердой стенки, поскольку в этом случае процесс теплообмена между газом и стенкой может быть достаточно точно рассчитан.

Важной отличительной особенностью данной задачи, является необходимость учета запаздывания распространения тепла в газе и теплопроводной стенке. Это обстоятельство приводит к необходимости использования в уравнениях Навье-Стокса (в уравнении энергии) и в уравнении теплопроводности стенки определения теплового потока в виде q = kdt/dx - αdq/dt, где α - эмпирическая константа, отражающая конечную скорость распространения теплового потока [5]. Данная постановка является новой, и ранее не рассматривалась. В работе приведены результаты численного решения задачи об отражении ударной волны от стенки с учетом эффекта запаздывания теплового потока.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 08-08-00414.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сапожников С.З., Митяков В.Ю., Митяков А.В., Петров Р.Л., Григорьев В.В., Бобашев С.В., Менде Н.П., Сахаров В.А.* Измерения теплового потока на внутренних стенках канала ударной трубы // Письма в ЖТФ, 2004, том 30, вып. 2, с. 76 - 80.
2. *Сахаров В.А., Менде Н.П., Бобашев С.В., Сапожников С.З., Митяков В.Ю., Митяков А.В.*Тепловые измерения на поверхности тела, обтекаемого сверхзвуковым потоком азота // Письма в ЖТФ, 2006, том 32, вып. 14, с. 46 - 51.
3. *Divin N.P., Mitiakov A.V., Mitiakov V.Y., Sapozhnikov S.Z.* Universal sensor for measuring shear stress, mass flow or velocity of a fluid or gas, for determining a number of drops, or detecting drip or leakage. Patent Number: EP 1223411. Publication date: 2002-07-17.

4. *Roediger T., Gaisbauer U., at al.* A Novel Sensor for Fast Heat Flux Measurements. AIAA 2006-3637.
5. *Котляр Я.М., Совершенный В.Д., Стриженов Д.С.* Методы и задачи тепломассообмена. М.: Машиностроение. 1987. 311 с.

ИССЛЕДОВАНИЕ КОММУТАТИВНЫХ БИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С КВАДРАТИЧНЫМ ФУНКЦИОНАЛОМ

Бобровский Д.И.
Вычислительный центр РАН им. А.А. Дородницына, Москва

Рассматривается задача минимизации функционала:

$$J(u) = |x(T,u) - y|^2 \to inf, \tag{1}$$

где управления $u_k(t) \in L_2(t_0,T)$, $k = \overline{1,...,m}$, $u = (u_1,...,u_m) \in U \subset L_2^m$, $|u_i| \leqslant a_i \in R^+$, $i = \overline{1,...,m}$, $x(t,u)$ - решение задачи Коши системы

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A_0(t) + \sum\limits_{k=1}^{m} A_k(t)u_k(t))x(t), t \in [t_0,T], \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{2}$$

$A_0(t), A_k(t)$ матрицы порядка соответственно $n \times n$, $k = \overline{1,...,m}$.

Потребуем выполнения ряда требований.

Требование 1. $A_iA_j = A_jA_i, \forall i,j = \overline{0,...,m}$.

Требование 2. Векторы $A_ix_0, i = \overline{1,...,m}$ линейно независимы.

Введём ряд обозначений, а именно:

$$\varphi(u;t) = e^{A_0(t-t_0)}e^{\int\limits_{t_0}^{t}(\sum\limits_{i=1}^{m} A_iu_i(\tau))d\tau}, \xi(u;t) = e^{\int\limits_{t_0}^{t}(\sum\limits_{i=1}^{m} A_iu_i(\tau))d\tau}$$

Множество достижимости системы (2):$F_{T,U} = \bigcup\limits_{u \in U} x(T;u)$

Утверждение 1. Пусть выполнены требования 1, 2 и $m = n$ для системы (2). Тогда $F_{T,U}$ - выпуклое множество.

Утверждение 2. $F_{T,U}$ системы (2) при выполнении требования 1 - выпуклое, если $\forall u,v \in U, \exists \lambda \geqslant 0, r \in U : \xi(v-u) - E = \lambda \int\limits_{t_0}^{T} \sum\limits_{i=1}^{m} A_i(r_i(\tau) - u_i(\tau))d\tau$

Утверждение 3. Для выпуклости функционала задачи (1)-(2) выполнении требования 1 достаточно, чтобы матрица $\{\langle\varphi(u;T)x_0 - y, \varphi(u;T)A_iA_jx_0\rangle\}_{\{i,j\}}$ порождала положительно определенную квадратичную форму.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-01-00416).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Емельянов С.В., Коровин С.К., Бобылев Н.А.* О выпуклости образов выпуклых множеств при гладких отображениях // ДАН. 2002. Т. 385. N. 3. С.302–304.
2. *Вахрамеев С.А.* Теоремы релейности и смежные вопросы // Труды мат. ин-та им. В.А.Стеклова. 1998. Т. 220. С. 49–112

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ РАВНОВЕСИЯ ПЛАЗМЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Брушлинский К.В.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша, Москва

В лекции обсуждаются математические и вычислительные вопросы моделирования и расчетов равновесных плазменных конфигураций в плазменных ловушках, исследования которых связаны с перспективами управляемого термоядерного синтеза. Рассматриваются в основном тороидальные ловушки (токамак, стелларатор и др.). Специальный интерес представляют ловушки нового типа - "галатеи": в них проводники с током, создающие магнитное поле, погружены в плазменный объем, что дает возможности сделать геометрию магнитной конфигурации более разнообразной и повысить предполагаемые параметры удержания [1]. В основе математических моделей - численное решение задач с уравнениями магнитной газодинамики, которые можно отнести к следующим трем направлениям.

1. Моделирование процесса формирования равновесной магнитоплазменной конфигурации в заданной области связано с решением нестационарных МГД-задач, где равновесие устанавливается со временем. Задачи, как правило, двумерные ввиду симметрии большинства рассматриваемых ловушек. В моделях ловушек - галатей необходимо изолировать проводник от горячей плазмы. Для этого ток в плазме вблизи проводника должен иметь направление, противоположное току в остальной части объема, а это противоречит условиям строгого равновесия. Требуемая конфигурация существует на квазиравновесной стадии, длительность которой обеспечивается высокой проводимостью плазмы.

2. Геометрия и свойства равновесной конфигурации вне зависимости от истории ее формирования исследуются в плазмостатических моделях. Их математический аппарат - краевые задачи с МГД-уравнением равновесия и уравнениями Максвелла. В двумерных задачах он значительно упрощается и сводится к одному скалярному эллиптическому уравнению второго порядка с нелинейной правой частью - уравнению Грэда -Шафранова, часто используемому в расчетах тороидальных магнитных ловушек. Теория и практика решения этих задач содержит вопросы существования и единственности ре-

шений, общие для широкого класса математических моделей горения, кинетики химических реакций, электрохимии и других процессов взаимодействия реакции и диффузии. Вопросы относятся к теории полулинейных дифференциальных уравнений эллиптического и параболического типов, а ответы на них даются в терминах спектральной теории операторов линеаризованных задач [2].

3. Численное решение краевых задач плазмостатики итерационными методами типа установления позволяют говорить о специфической устойчивости ("диффузионной") равновесных решений. Критерии устойчивости следуют из упомянутой выше спектральной теории. Диффузионная устойчивость связана с общеизвестной МГД-устойчивостью равновесных конфигураций, а ее исследование значительно проще последней [3].

Обсуждаемые работы выполнены при финансовой поддержке РФФИ, грант № 06-01-00312

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Морозов А.И., Савельев В.В.* О Галатеях - ловушках с погруженными в плазму проводниками.// Усп. физ. наук. 1998 Т. 168, № 11, с. 1153–1194.
2. *Брушлинский К.В., Савельев В.В.* Магнитные ловушки для удержания плазмы. //Матем. моделирование. 1999. Т. 11. N. 5. С. 3–36.
3. *Брушлинский К.В.* Два подхода к задаче об устойчивости равновесия плазмы в цилиндре// Прикладная матем. и механика. 2001, Т. 65. Вып. 2. С. 235–243.

ИССЛЕДОВАНИЕ КОМПОНЕНТНОГО СОСТАВА ГЕЛИЕВОЙ ЯДЕРНО-ВОЗБУЖДАЕМОЙ ПЛАЗМЫ, СОДЕРЖАЩЕЙ НАНОКЛАСТЕРЫ СОЕДИНЕНИЙ УРАНА, В ЗАВИСИМОСТИ ОТ КОНЦЕНТРАЦИЙ И РАЗМЕРОВ НАНОКЛАСТЕРОВ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Будник А.П., Косарев В.А.

ГНЦ РФ Физико-энергетический институт им. А.И. Лейпунского, Обнинск

В данной работе проводится математическое моделирование кинетических процессов в плазме инертных газов, возбуждаемой осколками деления, содержащей нанокластеры соединений урана. Рассматривается гелиевая ядерно-возбуждаемая плазма, содержащая нанокластеры соединений урана.

При добавлении нанокластеров соединений урана в плазму инертных газов, может существенно изменяться компонентный состав данной среды. Это может отразиться на протекании кинетических процессов в активной среде лазеров с ядерной накачкой.

В настоящей работе была разработана теоретическая модель и комплекс программ для самосогласованного описания кинетических процессов в плазме инертных газов, возбуждаемой осколками деления, содержащей нанокластеры соединений урана. Система интегродифференциальных уравнений, описывающих временную эволюцию ядерно-возбуждаемой плазмы с учетом электрон-электронных столкновений включает в себя следующие уравнения:

1) Уравнение Больцмана для функции распределения электронов по энергиям.

2) Систему дифференциальных уравнений, описывающую изменение компонентного состава ядерно-возбуждаемой плазмы с учетом процессов атомной, молекулярной, ионной, электронной и излучательной кинетики, включающие, в частности, описание изменения распределения нанокластеров по зарядам.

С применением созданного комплекса программ проведено математическое моделирование кинетических процессов в ядерно-возбуждаемой плазме с учетом наличия в ней пылевых частиц. Расчеты проводились при различных концентрациях и размерах нанокластеров в условиях характерных для ядерной накачки плотностей удельных мощностей энерговклада.

Исследования проведены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-08-00456).

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗЛУЧАТЕЛЬНЫХ СВОЙСТВ ЯДЕРНО-ВОЗБУЖДАЕМОЙ $He-N_2-H_2$ ПЫЛЕВОЙ ПЛАЗМЫ

Будник А.П., Косарев В.А., Кузнецова Е.Э.

ГНЦ РФ Физико-энергетический институт им. А.И. Лейпунского, Обнинск

В последнее время, в связи с бурным развитием нанотехнологий, было предложено использовать в плазме частицы пыли (частички диаметром десятки нанометров). Это в некоторых случаях может в десять и более раз увеличить эффективность прямого преобразования ядерной энергии в энергию когерентного оптического излучения. В рамках исследования излучательных свойств ядерно-возбуждаемой пылевой плазмы была создана многокомпонентная математическая модель кинетических процессов $He-N_2-H_2$ среды содержащей частицы урановой пыли. Кинетика процессов в плазме содержащей мелкодисперсные частицы малоизученна и методы математического моделирования процессов в пылевой плазме только разрабатываются.

Специфика активной лазерной среды такого сорта заключается в том, что частицы пыли, попадая в плазму инертных газов, могут существенно изменять компонентный состав среды. Это может существенно влиять на протекание кинетических процессов в активной среде лазеров с ядерной накачкой и приводить к изменению генерационных характеристик среды. Настоящая работа посвящена математическому моделированию задач такого типа. В них наряду с уравнениями микроскопической кинетики, описывающими неравновесные кинетические процессы в многокомпонентной ядерно-возбуждаемой плазме (несколько сотен), учитывается неравновесное распределение электронов по энергиям, а, также, основные плазмохимические и радиационные процессы. Математическая модель локальной кинетики ядерно-возбуждаемой пылевой плазмы представляет собой в общем случае систему уравнений, описывающую процессы атомной, молекулярной, ионной, электронной и радиационной кинетики, а также кинетику пылевых частиц. В работе представлены результаты математического моделирования кинетических процессов ядерно-возбуждаемой $He - N_2 - H_2$ пылевой плазмы. В частности, исследовано влияние пыли на генерационные характеристики такой лазерной среды, при различных удельных мощностях энерговклада и разных концентрациях пыли, а также рассмотрены спектры и процессы спонтанного излучения.

Исследования проведены при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и правительства Калужской области (проект № 07-02-96419).

О ПРИМЕНЕНИИ КОНТИНУАЛЬНЫХ И ДИСКРЕТНЫХ МАРКЕРОВ ДЛЯ РАСЧЕТА ТЕЧЕНИЙ СО СВОБОДНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Бураго Н.Г.

Институт проблем механики РАН, Москва

История методов маркеров и маркер-функций рассмотрена в [1]. Здесь описывается опыт автора по применению непрерывных и дискретных маркеров для моделирования течений тяжелой жидкости со свободными границами

В методе непрерывных маркеров маркер-функция равна единице там, где жидкость есть, и нулю там, где ее нет. Она подчиняется уравнению переноса и на свободной поверхности равна 0.5. Даже при использовании консервативной базовой схемы решения задачи Навье-Стокса из-за счетной диффузии и погрешностей в определении положения свободной границы на больших временах становятся заметными нарушения закона сохранения массы. Для устранения этого недостатка предложена процедура корректировки маркерфункции. В литературе данный счетный эффект не упоминается.

В метод дискретных маркеров для моделирования течений с открытыми границами введена возможность генерации маркеров на входных границах и уничтожения маркеров, покидающих область решения. Это расширило область применения метода дискретных маркеров.

Представлены следующие результаты решения новых (и старых) трехмерных нестационарных задач о течениях тяжелой несжимаемой вязкой жидкости: 1) падение капли в бассейн с водой; 2) стекание тяжелой жидкости с верхнего этажа на нижний через дыру в полу; 3) обрушение водяной колонны в замкнутом бассейне; 4) течение в вертикальной струе с образованием фонтана и лужи; 5) падение горизонтальных водяных струй в бассейн с водой. В отличие от имеющихся в литературе данные решения задач получены на больших временах.

Рассмотрены специфические для задач о течениях со свободными границами тесты, включающие перенос материальных субстанций в специальным образом заданных полях скорости. Освещены имеющиеся затруднения и нерешенные задачи рассматриваемого класса. Детали можно найти в [2].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н.* Обзор контактных алгоритмов // Известия РАН. МТТ. 2005. N. 1. С. 44-85.
(черновик: http://www.ipmnet.ru/~burago/papers/cont.pdf)
2. *Бураго Н.Г.* Численное решение задач с подвижными границами раздела // Докт. дисс. Москва: ИПМех РАН, 2003. 222 с.
(http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/books/dis_Burago_Doc2003.pdf)

ДИНАМИКА ПЛАЗМЕННОГО ШНУРА С УЧЕТОМ ИНЕРЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ

Гавриков М.Б., Сорокин Р.В.
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

Магнитная гидродинамика применима для исследования крупномасштабных процессов в нерелятивистской плазме, $L \gg l_{MGD}$, где L - характерный линейный масштаб, а „квазидлина“ l_{MGD} равна:

$$l_{MGD} = \frac{c\, m_e^{1/2} m_i^{1/2}}{2\pi^{1/2} e Z^{1/2} \rho^{1/2}} = \frac{c}{\omega_p} = \frac{0.283 \cdot 10^6}{Z^{1/2} n^{1/2}} \qquad (1)$$

Здесь ω_p - плазменная частота, Z - кратность заряда ионов, ρ - суммарная плотность электронов и ионов, n - концентрация числа ионов. При исследований мелкомасштабных процессов и эффектов в разреженной плазме условие $L \gg l_{MGD}$ нарушается, и надо пользоваться двухжидкостной гидродинамикой. Оказывается, для нерелятивистских процессов двухжидкостная гидродинамика плазмы сводится к одножидкостной - уравнениям электромагнитной гидродинамики (ЭМГД). Считая электроны и ионы идеальными политропными газами с общим показателем адиабаты γ и пренебрегая всеми диссипациями кроме магнитной вязкости, запишем ЭМГД - уравнения в виде:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathtt{div}\boldsymbol{U} = 0, \quad \rho\frac{d\boldsymbol{U}}{dt} = -\nabla p_{\Sigma} + \frac{1}{c}\left[\boldsymbol{j},\boldsymbol{H}\right] - \lambda_e\lambda_i\mathtt{Div}\frac{\boldsymbol{j}\boldsymbol{j}}{\rho}\\
&\frac{dp_i}{dt} + \gamma p_i\mathtt{div}\boldsymbol{U} = -\lambda_e\rho^{\gamma-1}\boldsymbol{j}\nabla\left(\frac{p_i}{\rho^{\gamma}}\right) + \frac{m_e}{m_{\Sigma}}\frac{j^2}{\sigma}\\
&\frac{dp_e}{dt} + \gamma p_e\mathtt{div}\boldsymbol{U} = \lambda_i\rho^{\gamma-1}\boldsymbol{j}\nabla\left(\frac{p_e}{\rho^{\gamma}}\right) + \frac{m_i}{m_{\Sigma}}\frac{j^2}{\sigma}\\
&\frac{1}{c}\frac{d\boldsymbol{H}}{dt} + \mathtt{div}\boldsymbol{E} = 0,\ \boldsymbol{E} + \frac{\lambda_e\lambda_i c^2}{4\pi\rho}\mathtt{rotrot}\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} - \frac{1}{c}\left[\boldsymbol{U},\boldsymbol{H}\right] + \frac{1}{\rho}\mathtt{Div}W\\
&\mathtt{div}\boldsymbol{H} = 0,\ \boldsymbol{H} = \frac{c}{4\pi}\mathtt{rot}\boldsymbol{H}
\end{aligned} \tag{2}$$

где $\lambda_e = m_e/e$, $\lambda_i = m_i/\left(Ze\right)$, $m_{\Sigma} = m_i + m_e$, $p_{\Sigma} = p_i + p_e$, $d/dt = \partial/\partial t + \boldsymbol{U}\cdot\nabla$, $\boldsymbol{U}$ - массовая скорость, ρ - полная плотность, σ - проводимость плазмы. Тензор W , состоящий из холловских слагаемых, равен:

$$\begin{aligned}
W = \left(\lambda_e - \lambda_i\right)\left[\lambda_e\lambda_i\frac{\boldsymbol{j}\boldsymbol{j}}{\rho} - \frac{\boldsymbol{H}\boldsymbol{H}}{4\,\pi}\right]\\
+ \left[\left(\lambda_e - \lambda_i\right)\frac{H^2}{8\,\pi} + \lambda_e p_i - \lambda_i p_e\right] I_3 + \lambda_e\lambda_i\left(\boldsymbol{U}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}\,\boldsymbol{U}\right)
\end{aligned} \tag{3}$$

При этом:

$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{U} + \lambda_e\boldsymbol{j}/\rho$, $\boldsymbol{v}_e = \boldsymbol{U} - \lambda_i\boldsymbol{j}/\rho$, $\rho_i = \lambda_i\rho/\lambda$, $\rho_e = \lambda_e\rho/\lambda$, $\lambda = \lambda_i + \lambda_e$

Формально МГД - уравнения получаются из (2), (3) вычеркиванием всех слагаемых, содержащих ρ в знаменателе, а уравнения холловской МГД, если положить $m_e = 0$, $\lambda_e = 0$. Из (2), (3) следует, что учет двухжидкостной природы плазмы (инерции электронов) приводит к появлению добавки $\lambda_e\lambda_i\boldsymbol{j}\boldsymbol{j}/\rho$ в тензор плотности потока импульса и к существенному усложнению обобщенного закона Ома - теперь поле $\boldsymbol{E}$ нелокально зависит от остальных параметров течения (в частности, для нахождения $\boldsymbol{E}$ надо ставить краевую задачу), а вторые производные в обобщенном законе Ома приводят к сильной пространственной дисперсии.

ЭМГД - уравнения позволяют исследовать течения плазмы с сильной неоднородностью по плотности, например, динамику плазмы в Z - пинчах и перетяжках плазменного фокуса.

В работе в лагранжевых координатах решается ЭМГД - система (2), (3) применительно к динамике цилиндрически симметричного плазменного шнура в простейшей геометрии полей $E_\varphi = 0$, $H_r = H_z = 0$, $U_\varphi = 0$. Предложена простая конечно - разностная схема, поставлена эллиптическая краевая задача для поля E_z, к которой сводится обобщенный закон Ома. Алгоритм тестировался на точных аналитических решениях ЭМГД - уравнений типа однородных деформаций (гладких и с контактным разрывом). Полученные результаты сравнивались с МГД - решениями.

Основной вывод работы - в обязательности учета инерции электронов при исследовании разрядной плазмы в Z - пинчах и плазменном фокусе. В противном случае неизбежны сильные качественные и количественные исключения параметров плазмы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-01-00299).

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Грудницкий В.Г.

Вычислительный Центр РАН, Госуниверситет управления, Москва

В докладе излагаются основные результаты нелинейной теории законов сохранения сплошной среды.

1. Характеристики и разрывы решений квазилинейных гиперболических уравнений рассмотрены с единых позиций. Роль тождественного характеристического преобразования выполняет аналитическое решение задачи о распаде произвольного разрыва, удовлетворяющее законам сохранения. При этом возникает возможность характеристического анализа решений всюду, включая разрывы.

2. Предложена обобщённая (нелинейная) форма записи характеристических соотношений, допускающая предельный переход к поверхности разрыва и являющаяся удобной и универсальной формой представления законов сохранения.

3. Показана обоснованность и результативность применения характеристического анализа не только к гиперболической (невязкой) форме законов сохранения, но к уравнениям, в которых учитываются вязкие свойства среды. В этом случае для явных схем расчета удаётся получить достаточные условия устойчивости непрерывным образом переходящие от условий гиперболического типа к параболическому по мере роста коэффициента вязкости.

4. Удаётся определять влияние правых частей различного типа на условия

устойчивости.

5. Главными результатами теории являются достаточные условия устойчивости, во многих случаях являющиеся необходимыми. Они получены для широкого набора процессов: одномерных и многомерных нестационарных разрывных течений в декартовых и криволинейных координатах; стационарных, сверхзвуковых в некотором направлении течений; нестационарных течений сжимаемого вязкого газа. Полученные условия обеспечивают монотонность численных решений вблизи разрывов.

Все перечисленные результаты не относятся к конкретным численным схемам. Характеристический анализ на основании тождественных преобразований законов сохранения можно проводить для любой схемы использующей эти законы в дивергентной форме. При этом распад разрыва может содержаться в качестве элемента схемы (например, схема Годунова), или не содержаться в ней (например, схема Лакса).

ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТЕНЗОРОВ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПРОНИЦАЕМОСТЕЙ ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОГО ПЛАСТА НА МНОГОПРОЦЕССОРНОЙ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

Губайдуллин Д.А., Никифоров А.И., Садовников Р.В., Цепаев А.В.
Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань

В реальных условиях продуктивные пласты, как правило, обладают анизотропией фильтрационных свойств, которая может быть обусловлена послойной неоднородностью и наличием различного рода включений в результате процессов осадконакопления, а также развитием и формированием системы трещин определенной направленности, вследствие различного рода тектонических процессов. Поэтому практика эксплуатации месторождений нефти и газа требует учета не только неоднородности коллекторских свойств пласта, но и тензорной природы коэффициента проницаемости. Традиционный учет анизотропии коллекторских свойств предполагает, что направления главных осей тензора коэффициентов проницаемости точно известны и совпадают с направлениями координатных осей. Для большинства реальных залежей указанные условия не выполняются. Таким образом, в общем случае такой подход к учету анизотропии коллекторских свойств в постановках задач теории фильтрации не пригоден для оценки продуктивных характеристик реальных пластов. Особенно это касается карбонатных коллекторов, отличающихся трещиновато-пористым строением. Причем, тензорная природа коэффициентов проницаемости системы трещин и блоков породы может значительно отличаться, как коэффициентами так и направлением главных осей. Такая «вложенная» анизотропия коэффициентов проницаемостей трещиновато-пористого пласта в настоящее время практически не исследована. Это объясняется тем, что значения компонент тензоров коэффициентов проницаемостей трещин и блоков не могут быть измерены непосредственно. Для получения оценок требуется решение обратных задач, т.е. задач идентификации параметров пласта на основе фактических данных эксплуатации скважин, которые несут в себе информацию о коллекторских свойствах пласта [1]. Решение задачи идентификации сводится к минимизации функционала-невязки между наблюдаемыми и вычисленными давлениями на скважинах. Такие задачи, как известно, являются некорректными, то есть малое изменение входных параметров может приводить к значительным изменениям в решении. Среди методов идентификации выделяют два основных класса методов: методы, основанные на коэффициентах чувствительности и методы теории оптимального управления [2]. Коэффициенты чувствительности используются для приближенного подсчета матрицы вторых производных от функционала-невязки. Методы теории оптимального управления для поиска искомых параметров пласта используют градиент функционала, подсчет которого основывается на решении сопряженной системы уравнений. Вследствие большой сложности решения обратных задач идентификации коллекторских свойств пласта с учетом тензорной природы коэффициентов проницаемостей на основе фактических данных эксплуатации системы скважин целесообразно применение параллельных вычислений на многопроцессорной ЭВМ [3]. Данная работа посвящена параллельной реализации алгоритмов идентификации фильтрационных параметров по результатам гидродинамических исследований системы скважин.

Работа выполнена в рамках раздела "Высокопроизводительные вычисления и многопроцессорные системы" программы № 14 Президиума РАН "Фундаментальные проблемы информатики и информационных технологий"

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Садовников Р.В.* Идентификация фильтрационных и ёмкостных параметров трещиновато-пористого пласта // Актуальные проблемы механики сплошной среды. К 15-летию ИММ КазНЦ РАН. Казань: КГУ, 2006. С. 179-188.
2. *Sun N.Z.* Inverse problems in groundwater modeling. Norvell: Kluwer Acad., 1994. 337 p.
3. *Губайдуллин Д.А., Садовников Р.В.* Применение параллельных алгоритмов для решения задачи фильтрации жидкости в трещиновато-пористом пласте к скважинам со сложной траекторией // Вычислительные методы и программирование. 2007. Т. 8. N 2. С. 95-102.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС РАСЧЕТА ДВИЖЕНИЯ ЛА В АТМОСФЕРЕ

Губанов Е.И., Землянский Б.А., Липницкий Ю.М., Панасенко А.В., Пугачев В.А., Чернов В.В.

ФГУП Центральный научно-исследовательский институт машиностроения, Королев

Расчет сверхзвукового движения летательного аппарата ЛА в неоднородной среде является достаточно сложной задачей даже при использовании современной многопроцессорной вычислительной техники, которая в принципе позволяет его провести в наиболее полной постановке.

Алгоритм расчета по разработанному программному комплексу рассматриваемой задачи сводятся к следующему. 1) Расчет проводится на многопроцессорной вычислительной системе. 2) Считается, что наиболее трудоемким является расчет аэродинамики текущей обгарной формы ЛА. 3) В предположении приемлемости существующей аэродинамики на отрезке времени t+dt делается прогноз траектории движения ЛА (модуль расчета динамики движения ЛА) на момент времени t+dt (отрезок времени dt выбирается, например, из соображения достижения интегралом теплового потока в критической точки заданной величины - до этого момента времени геометрическая форма ЛА считается, сохраняющей свое предыдущее состояние). При этом проводится одновременный расчет тепломассообмена (модуль расчета тепломассообмена). В ходе расчета проводится контроль за прохождением участка траектории ЛА по однородной атмосфере или попаданием ее в облачную среду (модуль расчета параметров атмосферы в точке нахождения ЛА). В случае попадания ЛА в облачную среду расчет тепломассообмена проводится с учетом эрозионного состояния его поверхности. 4) Полученные на этапе 3) значения углов ориентации ЛА и скорости его движения являются исходными данными для опережающего расчета текущей аэродинамики (модуль расчета аэродинамики) на момент времени t+dt. При этом расчет аэродинамики проводится для 3-х значений скорости и для каждого значения скорости для 3-х значений углов атаки ЛА так, чтобы можно было провести интерполяцию "истинной"аэродинамики после уточняющего расчета траектории движения ЛА. Расчет аэродинамики проводится на количестве процессоров максимально минимизирующих время ее расчета по отношению к времени расчета траектории на отрезке t+dt. 5) С использованием известной аэродинамики в моменты времени t и t+dt проводится уточняющий расчет тепломассообмена и траектории движения ЛА на отрезке времени t+dt. При этом задача о тепловом и эрозионном разрушении является комплексной и включает следующие частные задачи: расчет распределения давления по поверхности тела; определение тепловых потоков по найденному распределению давления; определение характеристик частиц, сталкивающихся с поверхностью; расчет линейной скорости уноса массы по поверхности тела; определение теплового состояния тела; расчет изменения формы тела. Коэффициенты теплообмена вдоль поверхности тела в "чистом потоке"рассчитываются по методу эффективной длины. При этом учитываются основные физические факторы, такие как: характер течения в пограничном слое (ламинарный или турбулентный); физико-химические процессы в пограничном слое (диссоциация, диффузия); влияние вдува паров разрушающегося материала на теплообмен.

При практической реализации комплекса программ проведена интеграция различных его модулей и разработан механизм обмена данными между ними на основе средств языка XML. Создан специальный управляющий интерфейс, позволяющий вести работу в режиме удаленного доступа и в рамках единой графической оболочки выполнять все основные действия, необходимые для проведения расчета и обработки его результатов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 05-08-33685).

СЛАБОВОЗМУЩЕННОЕ ДВИЖЕНИЕ ВОЛЧКА, ЗАПОЛНЕННОГО ЖИДКОСТЬЮ, И ПРОБЛЕМА УПРАВЛЕНИЯ

Гурченков А.А.[1], Иванов И.М.[2], Кузовлев Д.И.[1], Носов М.В.[2]
[1]*Вычислительный центр имени А. А. Дородницына РАН, Москва*
[2]*"МАТИ"– Российский Государственный Технологический Университет имени К.Э. Циолковского, Москва*

Исследуется возмущенное около равномерного вращения движение динамически симметричного твердого тела с полостью, содержащей идеальную жидкость. Подобные системы возникают при решении задач стабилизации и управления космическими аппаратами и различными роторными установками. Представлен подход и методика решения задач оптимального управления вращательным движением рассматриваемой системы.

Проблема совместного решения уравнений гидродинамики и механики сведена к решению задачи на собственные значения, зависящей лишь от геометрии полости, и последующему интегрированию системы дифференциальных уравнений.

Получено представление угловой скорости в виде свертки управляющего момента и некоторой функции:

$$\Omega(t) = \int\limits_0^t M(t) \left(\sum_{k=1}^{2} X_k e^{p_k(t-\tau)} \right) d\tau.$$

Здесь X_k, p_k — коэффициенты, зависящие от геометрии полости. Данная формула осуществляет сведение этой зависимости к стандартным формулировкам задач оптимального управления, что позволяет решать широкий класс задач управления вращательным движением системы тело–жидкость.

В качестве примера рассмотрено динамически симметричное твердое тело с цилиндрической полостью, заполненной жидкостью.

Поставлена задача оптимального управления вращением системы с функционалом смешанного типа, при наличии ограничений типа линейных неравенств, наложенных на управляющий момент:

$$I(\mathbf{M}) = \sum_{k=1}^{2} \left(\Omega_k(T) - \Omega_k^0 \right)^2 + \int\limits_0^T \left(M_1^2(t) + M_2^2(t) \right) dt \longrightarrow \inf,$$

$$\Omega_1(0) = \Omega_2(0) = 0, |M_1(t)| \leqslant C_1, |M_2(t)| \leqslant C_2.$$

Здесь $\mathbf{M} = (M_1, M_2)$ — искомое управление, $C_k, \Omega_k^0 (k = 1, 2)$ — заданные действительные числа. Задача решена численно методом Крылова–Черноусько. В случае отсутствия ограничений на управляющий момент задача решена аналитически.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты № 07-01-00380, 06-01-00316.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гурченков А.А., Корнеев В.В., Носов М.В.* Устойчивость и управление движением волчка с жидким наполнением. М.: ВЦ РАН, 2006. 38 с.
2. *Гурченков А.А., Носов М.В.* Устойчивость ротора с вязкой жидкостью. М.: ВЦ РАН, 2005. 32 с.
3. *Черноусько Ф.Л., Баничук Н.В.* Вариационные задачи механики и управления. М.: Наука, 1973. 238 с.

РАСЧЕТ ЗАДАЧ АЭРО-ГАЗОДИНАМИКИ С ПОМОЩЬЮ ГРАФИЧЕСКИХ СОПРОЦЕССОРОВ

Давыдов А. А.

ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва

За последние несколько лет программируемые графические процессоры (GPU) достигли абсолютной производительности превышающей производительность центрального процессора в несколько раз [1]. Однако эффективно использовать такую мощность для решения задач не связанных с обработкой графики стало возможным лишь недавно.

Цена устройства, позволяющего получить такие результаты (в нашем случае это NVIDIA GeForce 8800 GTX), сравнима со стоимостью серверного процессора. Это делает их применение весьма перспективным.

В работе проводиться расчет сверхзвукового течения в канале с сужением в рамках уравнений Эйлера. Демонстрируется возможность существенного ускорения расчета с использованием GPU. Проведенные расчеты показывают, что при незначительном изменении существующей «последовательной» программы при помощи CUDA (Compute Unified Device Architecture) возможно ускорение в 15-20 раз по сравнению с серверным процессором. Общность используемого подхода дает возможность простого перехода к трехмерным расчетам.

Проведена оценка эффективности реализации программ с использованием различных возможностей (CUDA), таких как оптимизация работы памяти и использование встроенных типов данных.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ. Проекты 08–07–00086–а и 08–08–00356–а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. http://www.nvidia.com/object/cuda_home.html

ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС MASTER - ИНТЕГРИРОВАННАЯ СРЕДА ВИЗУАЛЬНОГО КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ ФИЗИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

Давыдов И.А.[1], Пискунов В.Н.[1], Павлов С.В.[1], Руденко В.В.[1], Шабуров В.М.[1], Шабуров М.В.[1], Башуров В.В.[2]

[1]*РФЯЦ-ВНИИЭФ, Саров*

[2]*“Интеллект-Телеком”, Саров*

Комплекс MASTER предназначен для обучения и проведения расчетно-теоретического моделирования быстропротекающих нестационарных многомерных импульсных газо-, гидродинамических, упругопластических и магнитогидродинамических течений, сопровождающихся звуковыми, ударными, тепловыми, детонационными волнами, высокими сжатиями и удельными энергиями изучаемых сред.

В состав комплекса включены различные алгоритмы, позволяющие моделировать реальные физические эксперименты с использованием численных методов, как в одномерном, так и в многомерном приближении, как на микро уровне (молекулярная и кластерная динамика), так и на макро уровне (лагранжева и эйлерова методики, метод сглаженных частиц и др.). Комплекс содержит базу данных характеристик веществ (уравнений состояния, проводимостей, потенциалов), а также базу данных задач-примеров, иллюстрирующих ряд классических явлений физики сплошных сред.

Интегрированная среда комплекса включает развитые средства визуальной подготовки начальных данных задач, мощный аппарат визуализации моделируемых процессов и удобные средства управления моделированием и обработки результатов расчетов.

Отличительными особенностями интегрированной среды являются простота, развитый дружественный пользовательский интерфейс, высокая степень автоматизации всех этапов работы пользователя.

Комплекс может использоваться в качестве простого компьютерного инструмента при проведении научных исследований, а также в качестве дополнения к традиционным формам преподавания в учебных курсах физики сплошных сред. Опыт использования комплекса в ВУЗах и научно-исследовательских организациях показал его высокую эффективность.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСЗВУКОВОГО ОБТЕКАНИЯ НАДКАЛИБЕРНЫХ ОБТЕКАТЕЛЕЙ РН

Даньков Б.Н., Ильина М.М., Липницкий Ю.М., Панасенко А.В.
ФГУП Центральный научно-исследовательский институт машиностроения, Королев

При исследовании трансзвукового обтекания ракет носителей (РН) сложной конфигурации установлено возникновение бегущих и стоящих акустических волн в межблочных каналах [1]. Получение этих колебаний в расчетном плане является в настоящее время актуальной задачей. При этом основная трудность в расчете связана с необходимостью аппроксимации структурных элементов течения газа в значительных по размерам областях, по отношению к размерам РН. Расчеты проведены в рамках модели уравнений Навье-Стокса.

Расчеты проведены при последовательном уменьшении числа Маха. В качестве примера ниже в таблице для модели с параметрами: сферический сегмент, сопряженный с конусом угла полураствора 20 град, общей длиной 51.6737 (точка 1), переходящим в цилиндр общей длиной 115.711 (точка 2), переходящим в обратный конус с углом полураствора 25 град 30’ общей длиной 127.701 и переходящим в цилиндр (точка 3),приведены значения давления (отнесено к давлению в набегающем потоке, первая строка – эксперимент, вторая - расчет) для различных чисел Маха при нулевом угле атаки в вышеуказанных характерных точках модели.

M	точка 1	точка 2	точка 3
2.04	1.868	0.958	1.14
2.04	1.84	0.93	0.89
1.59	1.62	0.965	1.106
1.59	1.64	0.92	1.2

Работа выполнена в рамках научной школы НШ-2496.2008.8 и при финансовой поддержке РФФИ, проекты № 08-08-00356, № 07-01-00530.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Даньков Б.Н, Косенко А.П., Куликов В.Н., Отменников В.Н.* Волновые возмущения в трансзвуковых отрывных течениях. // МЖГ, 2006, № 6, с. 153 - 165.

ОДНОМЕРНОЕ ИСТЕЧЕНИЕ В ВАКУУМ НОРМАЛЬНОГО ГАЗА В УСЛОВИЯХ САМОГРАВИТАЦИИ

Дерябин С.Л., Мезенцев А.В.

Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург

Рассматриваются одномерные течения нормального газа в предположении, что на массу газа действует ньютоновское тяготение. Исследуются задачи о схлопывании одномерной полости и об одномерном разлете газа. Эти газодинамические задачи формулируются в виде начально-краевых задач для интегро-дифференциальной системы с частными производными, при этом вводятся некоторые ограничения на уравнение состояния нормального газа [1]. Решения поставленных начально-краевых задач строятся в виде степенных рядов, и доказывается, что область сходимости этих рядов покрывает всю зону течения от поверхности слабого разрыва границы газ-вакуум включительно. Также доказывается, что в задаче о схлопывании одномерной полости свободная поверхность газ-вакуум, движется с постоянной скоростью, как и при отсутствии гравитации. В задаче об одномерном разлете газа доказывается, что свободная поверхность движется как частица в поле притяжения материальной точки.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 08-01-00052.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баутин С.П., Дерябин С.Л.* Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум. Новосибирск: Наука, 2005. 390 с.

ОЦЕНКА ЭКОНОМИЧНОСТИ КОМПАКТНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Довгилович Л.Е., Софронов И.Л.
Московский физико-технический институт, ГУ
Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва

Рассматривается волновое уравнение, необходимость точного и быстрого решения которого возникает во многих прикладных задачах. В частности, в обратных задачах геофизики объем трехмерной сетки может достигать 10^{10} узлов, а количество различных правых частей – нескольких сотен. Для снижения вычислительных ресурсов и времени счета необходимо использовать экономичные разностные схемы повышенного порядка аппроксимации, причем эффективно параллелизуемые.

В данной работе мы строим два семейства явных разностных схем вплоть до восьмого порядка точности: центрально-разностные и компактные. На данном этапе рассматривается двумерная постановка задачи с характерными размерами пространственной сетки 500×500. Кроме того, для исключения отражений от поверхности мы применяем технологию прозрачных граничных условий [1].

Теоретические оценки и численные эксперименты показали, что в случае гладкой волновой модели компактные схемы могут дать полуторократный выигрыш по времени счета по сравнению с центрально-разностными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sofronov I.L.* Non-reflecting inflow and outflow in wind tunnel for transonic time-accurate simulation // J. Math. Anal. Appl., 1998, V. 221, P. 92–115.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЕГО С ВЕЩЕСТВОМ

Долголева Г.В., Епишкова Е.Н.
РФЯЦ-ВНИИЭФ, Саров

В докладе представлена система из двух уравнений, описывающая перенос излучения и взаимодействия его с веществом. Первое уравнение – это спектральное кинетическое уравнение переноса излучения в сферической геометрии, второе – уравнение энергии, отвечающее за взаимодействие излучения с веществом. Способ решения кинетического уравнения переноса совместно с уравнением энергии - это расщепление по спектру и по угловой переменной. Для решения уравнения переноса использовался DSn-метод. Расчет весов по пространству и угловой переменной производился по формулам, впервые приведенным в статье [1]. Схему с такими весами называют WDD-схемой. Для данной схемы в докладе будут показаны результаты численного исследования порядка аппроксимации на тестовой задаче, взятой из статьи [2]. Работоспособность указанной схемы расщепления проверена на задаче излучения абсолютно черного тела, нагретого до некоторой указанной температуры. Задача имеет известное решение [3]. В заключении рассматривается задача Флэка [4]. Проведено сравнение с результатами итерационной схемы [5]. В докладе представлены сравнительные графики для профилей температур электронов и потоков излучения на различные моменты времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wm.H.Read, K.D.Lathrop.* Truncation error analysis of finite difference approximations to the transport equation. Nuclear Science and Engineering, 1970. V.41. № 2. P.237-248.
2. *Долголева Г.В., Загускин В.Л.* Применение схемы расщепления к расчету движения газа с переносом с переносом излучения // Численные методы механики сплошной среды. 1972. Т.2, № 2. С.56-67.
3. *Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1996.
4. *Fleck J.A.; Cummings Jr.J.D.* An implicit Monte Carlo Scheme for calculating time and frequenxe dependent nonlinear radiation transport // Comput. Phys. 1971. V.8. P.313-342.
5. *Мжачих С.В., Грошев Е.В., Юдинцев В.Ф.* О некоторых свойствах $\tilde{D}S_n^\gamma$-схем для сферически-симметричного уравнения переноса // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2000. Вып. 2. С.29-31.

ИССЛЕДОВАНИЕ МНОГОСЕТОЧНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ЖИДКОСТИ НА НЕСТРУКТУРНЫХ СЕТКАХ

Жуков В.Т., Феодоритова О.Б.

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва

В работе приводятся основные компоненты и исследование многосеточного метода, разработанного для конечно-элементных аппроксимаций систем уравнений Эйлера и Навье-Стокса на неструктурных сетках. В [1] нами предложен многоуровневый алгоритм для решения схем метода конечных элементов (МКЭ) высокого порядка p. Этот алгоритм по своей структуре является многосеточным методом, примененным для редукции схемы МКЭ порядка p к схеме с линейными элементами ($p = 1$); такого рода алгоритм называют

p-мультигридом. В развитии p-мультигрида нами на близких идеях построен геометрический мультигрид на неструктурных адаптивных сетках [2].

При построении многосеточных алгоритмов специальное внимание уделено поиску и практической проверке способов формирования операторов на грубых сетках. Грубосеточная коррекция играет ключевую роль в обеспечении эффективности мультигрида. В данной работе показана техника построения многосеточных операторов, приводящая в практически важных случаях к наследованию грубосеточным оператором свойств исходной сеточной дискретизации. Исследование свойств (аппроксимации, устойчивости) грубосеточных операторов проводится для схемы SUPG (стабилизированной схемы МКЭ) в случае модельных уравнений. Техника исследования состоит в численной оценке главного члена погрешности грубосеточных уравнений. Этот член определяет величину численной вязкости, вносимую в дискретные уравнения для обеспечения устойчивости. Вычисления проводятся на последовательности сгущающихся сеток, и полученные результаты сравниваются с аналогичными величинами, полученными для исходной стабилизированной дискретизации.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Государственной программы поддержки ведущих научных школ (НШ-9019.2006.1), программы № 3.1 Отделения математических наук РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жуков В.Т., Феодоритова О.Б., Янг Д.П.* Итерационные алгоритмы для схем конечных элементов высокого порядка // Математическое моделирование, 16(2004), № 7, 117-128.
2. *Жуков В.Т., Феодоритова О.Б.* Многосеточный метод для неструктурных конечно-элементных дискретизаций уравнений аэродинамики // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 5, Москва, 2008

МНОГОСЕТОЧНЫЙ АЛГОРИТМ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА НА НЕСТРУКТУРНЫХ СЕТКАХ

Жуков В.Т., Феодоритова О.Б.
Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва

При расчетах течений сплошной среды в рамках модели Навье-Стокса часто используют неструктурные адаптивные сетки. В результате дискретизации и линеаризации дифференциальных уравнений возникают системы линейных уравнений с числом неизвестных $10^5 - 10^7$, требующие, как правило, применения параллельных алгоритмов. Надежными являются итерационные методы подпространств Крылова в сочетании с методами Шварца как предобуславливателями. Для неструктурных сеток обычно используется метод Шварца, основанный на декомпозиции сетки на сеточные подобласти в соответствии с числом процессоров. При малом перекрытии подобластей происходит замедление скорости сходимости итераций с ростом числа процессоров. Рецепт лечения известен - развитие многосеточных алгоритмов, пригодных для неструктурных сеток. Этой проблеме посвящена данная работа, в которой излагается мультигрид для сеточных аппроксимаций уравнений Эйлера и Навье-Стокса, полученных с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Решение стационарных задач ищется установлением по времени, и в процессе линеаризации конечно-элементной схемы формируются системы линейных уравнений. В приложениях (и особенно на неструктурных сетках) трудно добиться, чтобы мультигрид обеспечил подавление всех мод ошибки итерационного приближения, поэтому мы используем мультигрид как предобуславливатель для метода Крылова – метода обобщенных минимальных невязок GMRES, который эффективно гасит именно отдельные моды или их небольшие группы.

Цель данной работы состоит в построении и практической оценке мультигрида для схем МКЭ на неструктурных треугольных сетках. В случае неструктурных сеток построение последовательности грубых сеток является непростой задачей. В качестве подходов можно использовать ре-дискретизацию, агломерацию (когда из ячеек подробной сетки строятся агломераты ячеек с построением на них многосеточных операторов). Для адаптивных неструктурных сеток такие приемы трудоемкости. Мы разрабатываем мультигрид для специального класса сеток, которые адаптируются к структуре течения в процессе многократного решения исходной задачи. При таком подходе после решения задачи на текущей сетке вырабатываются критерии адаптации, и строится новая сетка с увеличением числа узлов и/или их перераспределением. Предлагаемый метод основан на использовании адаптивной информации, служащей для конструирования последовательности грубых сеток. Запись грубосеточных операторов основана на комбинировании точного и приближенного исключения групп неизвестных, определяемых выбранными грубыми сетками. Приведены результаты численных экспериментов для типичных тестовых задач.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Государственной программы поддержки ведущих научных школ (НШ-9019.2006.1), программы № 3.1 Отделения математических наук РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жуков В.Т., Феодоритова О.Б.* Многосеточный метод для неструктур-

ных конечно-элементных дискретизаций уравнений аэродинамики // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, № 5, Москва, 2008

МЕТОД СУПЕРЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ РАСЧЕТА СЛОИСТЫХ СРЕД

Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Феодоритова О.Б.
Институт Прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва

Метод конечных суперэлементов (МКСЭ) [1] является специальным вариантом метода конечных элементов (МКЭ) и успешно применяется для решения дифференциальных уравнений, описывающих многомасштабные процессы, то есть для решения задач, в которых искомые функции обладают существенно разными характеристиками гладкости в разных частях расчетной области. Примерами таких задач являются задачи расчета ядерных реакторов, конвекции–диффузии, теории упругости. МКСЭ подробно освещен в литературе, см. [2–3] и приведенную там библиографию. Подход, практически идентичный МКСЭ, известен в зарубежной литературе под названием Residual Free Bubble Method – он активно развивается в последнее десятилетие.

В данной работе предложена модификация метода суперэлементов для расчетов слоистых сред, когда физические свойства существенно меняются в одном направлении. Такие задачи возникают в геофизике, микроэлектронике, материаловедении, исследовании нефте–газовых месторождений. Основные элементы предложенного метода иллюстрируются на примере решения трехмерного уравнения теплопроводности.

Для простоты изложения мы ограничимся прямоугольными сетками. Предлагаемая схема является гибридной – использует метод конечных элементов в регулярных ячейках и метод суперэлементов в нерегулярных ячейках, пересекаемых тонкими слоями.

Регулярными являются ячейки правильной геометрической формы (прямоугольный параллелепипед) и однородного состава, что в данном случае означает постоянство коэффициента теплопроводности в ячейке. Нерегулярные ячейки отличаются от регулярных либо нестандартной геометрической формой, либо неоднородной физической структурой. Изменение формы ячейки может происходить, например, вблизи границы расчетной области как результат пересечения ячейки с граничной поверхностью. Мы приведем способ аппроксимации уравнения в таких ячейках.

Особый случай представляют неоднородные ячейки. Например, в случае уравнения теплопроводности ячейки могут содержать тонкие слои, на границах которых коэффициент теплопроводности может меняться во много раз

($\approx 10^3 - 10^5$). Использование стандартного МКЭ для таких ячеек приводит к физически неверным профилям решения. Конечно, такие дефекты исправляются введением подробной сетки, но это может приводить к неприемлемому увеличению размерности сеточной задачи. Мы воспользуемся возможностью, которую предоставляет МКСЭ, и в качестве суперэлементного базиса в неоднородных ячейках возьмем приближенные решения исходного уравнения. Эти решения мы строим конечно-элементным методом на сетке, внутренней для каждой неоднородной ячейки. Структура суперэлемента может быть довольно сложной и подробной, однако это не влияет на размерность сеточной задачи – системы линейных уравнений, возникающей при дискретизации. Решение внутри нерегулярной ячейки может быть восстановлено с помощью построенного базиса, что повышает практическую точность результатов.

В методе суперэлементов [1–3] на границе ячейки сетки задают обычный интерполяционный базис, который продолжают внутрь как решение элементарных краевых задач. В дальнейшем такой базис будем называть *стандартным суперэлементным базисом*. Для слоистых структур предлагается использовать на границах ячеек, пересекаемых слоями, кусочно–гладкий базис, который продолжается внутрь таких ячеек как суперэлементный базис. Если ячейка не пересекается тонким слоем, но содержит мелкомасштабные инородные включения, то в такой ячейке строится стандартный суперэлементный базис. Предлагаемая модификация МКСЭ состоит в выборе базисных функций на границах ячеек – этот базис строится на основе приближенных решений исходного уравнения в предположении, что вдоль поверхностей разрыва коэффициентов решение меняется слабо. Такие базисные функции являются кусочно–гладкими (в простейшем случае – кусочно–линейными) и строятся аналитически или численно решением одномерных уравнений.

Предложенный метод можно обобщить для решения различных дифференциальных уравнений, включая системы уравнений, анизотропные среды и т.д.

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственной программы поддержки ведущих научных школ (НШ-9019.2006.1) и программы № 14 Президиума РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Страховская Л.Г., Федоренко Р.П.* Об одной специальной разностной схеме // В кн. Численные методы механики сплошной среды, Т. 7, N. 4. Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1976. С. 149–163.
2. *Жуков В.Т., Страховская Л.Г., Федоренко Р.П., Феодоритова О.Б.* Об одном направлении в конструировании разностных схем // ЖВМ и МФ.

2002. Т. 42, N. 2. С. 222–234.

3. *Жуков В.Т., Новикова Н.Д., Страховская Л.Г., Федоренко Р.П., Феодоритова О.Б.* Применение метода конечных суперэлементов для решения задач конвекции-диффузии // Математическое моделирование. 2004. Т. 14, N. 11. С. 63–78.

БЕЗУДАРНОЕ СЖАТИЕ И ГОРЕНИЕ ТЕРМОЯДЕРНЫХ МИШЕНЕЙ С УЧЕТОМ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ

Забродин А.В.[1], Забродина Е.А.[2], Имшенник В.С.[2], Масленников М.В.[1], Николаева О.В.[1], Басс Л.П.[1]

[1]*Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН*

[2]*Институт теоретической и экспериментальной физики им. А.И.Алиханова*

Рассматривается задача о безударном сжатии слоистой цилиндрической мишени, облучаемой с открытых торцов пучками ионов, движущихся параллельно оси симметрии мишени. Торможение ионов вызывает разогрев и разлет вещества в радиальном направлении, приводящий, в свою очередь, к кумуляции вещества DT и пушера U на ось мишени. Сжатие вещества инициирует загорание DT топлива, которое порождает мощный поток первичных нейтронов. Под их воздействием начинается ядерное энерговыделение в окружающей DT урановой оболочке (U238 или U235). Как правило, цепной ядерной реакции не происходит. Но энерговыделение в уране вызывает дополнительное обжатие, разогрев и выгорание DT топлива.

Это энерговыделение может быть весьма существенным, и его учет в математической модели представляется необходимым. Для этого в модель помимо уравнений трехтемпературной газодинамики (описывающих движение среды, перенос тепла и обмен энергиями между ионной, электронной, фотонной компонентами вещества) и уравнений кинетики термоядерного горения включается уравнение переноса нейтронов.

Это уравнение учитывает процессы поглощения нейтронов ядрами, различные реакции рассеяния нейтронов на ядрах, деление ядер под действием нейтронов. Решение уравнения переноса позволяет определить детальное распределение нейтронов по пространственным точкам и скоростям, которое, в свою очередь, позволяет с высокой точностью найти пространственное распределение импульса, передаваемого нейтронами ядрам при столкновениях, и энергии, получаемой средой от нейтронов. Эта энергия включает в себя

- кинетическую энергию нейтронов, передаваемую ядрам,
- энергию, выделяющуюся в результате деления ядер урана.

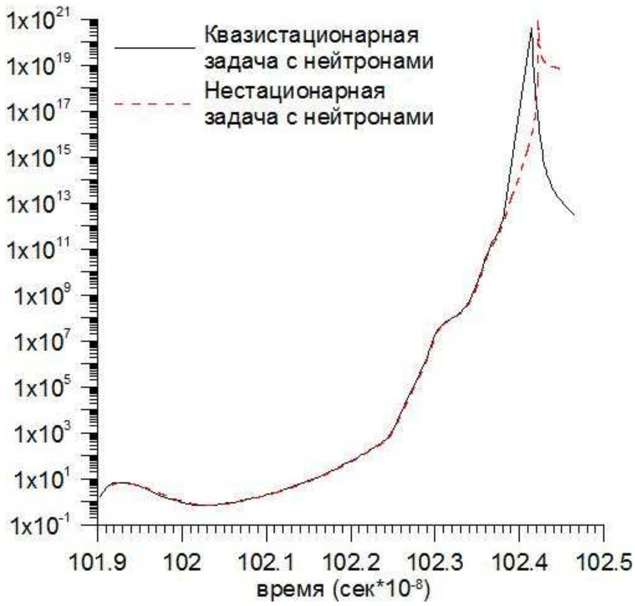


Рис. 1: Энерговыделение от нейтронов (Дж/с)

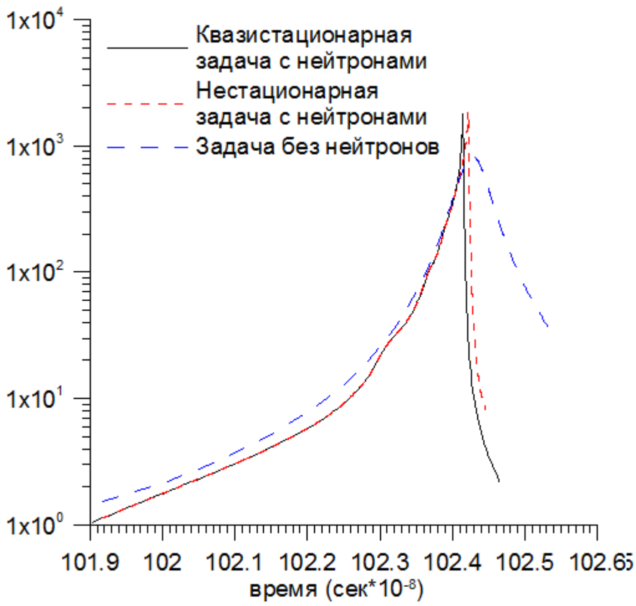


Рис. 2: Средняя плотность DT (г/см3)

С другой стороны, коэффициенты уравнения переноса - сечения взаимодействия нейтронов с ядрами – зависят от плотности среды, определяемой как решение уравнений газодинамики. Источник в уравнении переноса есть плотность нейтронов, рожденных в DT с результате термоядерных реакций, и находится с помощью решения уравнений кинетики термоядерного горения.

Такая модель разработана в двух вариантах. В первом случае используется квазистационарное приближение, и решение стационарного уравнения переноса ищется на одном из 50-ти временных шагов, на каждом из которых решаются уравнения газодинамики и термоядерного горения; нейтронные поля считаются постоянными на всех 50-ти шагах. Во втором случае нестационарное уравнение переноса решается на каждом газодинамическом временном шаге.

В качестве примера рассмотрим задачу, в которой величина энерговложения составляет 21 Мдж, а пушер образован атомами U235. На Рис.1 и Рис.2 в логарифмическом масштабе приведены графики зависимости двух характеристик процесса от времени для квазистационарной и нестационарной нейтронных моделей и модели, в которой нейтроны не учитываются.

Приведенные графики показывают, что неучет нейтронных процессов приводит к существенному занижению величины общего энерговыделения, к искажению режима сжатия и разлета мишени.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 08-01-00144-а

ПОСТРОЕНИЕ ПРОЗРАЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ СЛОИСТЫХ УПРУГИХ СРЕД

Зайцев Н.А., Софронов И.Л.

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва

Рассматривается проблема численного моделирования распространения упругих волн в слоистых средах при наличии анизотропии. В отличие от изотропного однородного случая построение неотражающих граничных условий на внешней (открытой) границе, например цилиндрической расчетной области, остается пока еще нерешенной задачей.

В качестве первого шага на пути построения искомого оператора проводится сглаживание параметров среды в некотором переходном слое, и задача сводится к моделированию неоднородной среды с наличием областей достаточно больших градиентов коэффициентов упругости. В рамках подхода квазианалитических прозрачных граничных условий (ПГУ) [1, 2] мы разрабатываем алгоритм численного решения вспомогательных задач, возникающих при вычислении функции Грина для системы уравнений упругости с переменными коэффициентами, применяя метод Галеркина. Используя тригонометрический базис, мы получаем спектральный метод, позволяющий эффективно решать задачи с вышеупомянутыми большими градиентами коэффициентов уравнения. При этом алгоритм обладает высокой степенью параллелизации.

На примерах тестовых расчетов показано, что получаемые квазианалитические операторы ПГУ обеспечивают высокую точность и являются устойчивыми при расчетах на большие времена.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 07-01-00476

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зайцев Н.А., Софронов И.Л.* Применение прозрачных граничных условий для решения двумерных задач упругости с азимутальной анизотропией // , Матем. моделирование, 2007, Т. 19, № 8, С. 49-54.
2. *I.L. Sofronov, N.A. Zaitsev,* Transparent boundary conditions for the elastic waves in anisotropic media // Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications. Eds. Benzoni-Gavage, Serre. Springer Verlag, 2008, P. 997-1004.

МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ПРОЗРАЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ТРЁХМЕРНЫХ ЗАДАЧ УПРУГОСТИ

Зайцев Н.А., Софронов И.Л.

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва

Для трёхмерных задач о распространении волн в упругих анизотропных средах в неограниченных областях конструируется оператор прозрачных граничных условий (ПГУ) для искусственных границ расчётной области. Рассматривается случай трансверсально изотропных сред, для которых применение PML в общем случае приводит к неустойчивой задаче в целом [1].

Предлагается распространение технологии построения ПГУ, развитого в [2, 3] для двумерных задач, на трёхмерный случай. Центральным местом метода является нахождение решений большого количества вспомогательных задач в неограниченных областях с высокой точностью (10^{-12}) с последующей рациональной аппроксимацией специального вида. По двум направлениям применяется спектральная аппроксимация, дающая на гладких решениях экспоненциальную сходимость, по радиальному направлению — метод экстраполяции Ричардсона с автоматической настройкой порядка аппроксимации (обычно оптимальным оказывается 6 или 8 порядок). Необходимость решения большого количества независимых задач позволяет эффективно распараллеливать алгоритм на вычислительных комплексах любой архитектуры.

Обсуждаются некоторые вычислительные аспекты предлагаемого метода и пути экономии времени и памяти.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 07-01-00476 и 08-01-00099.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Becache E., Fauqueux S., Joly P.* Stability of perfectly matched layers group velocities and anisotropic waves // JCP, 188, 2003, 399 - 433.
2. *Зайцев Н.А., Софронов И.Л.* Применение прозрачных граничных условий для решения двумерных задач упругости с азимутальной анизотропией // , Матем. моделирование, 2007, Т. 19, № 8, С. 49-54.
3. *I.L. Sofronov, N.A. Zaitsev,* Transparent boundary conditions for the elastic waves in anisotropic media // Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications. Eds. Benzoni-Gavage, Serre. Springer Verlag, 2008, P. 997-1004.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ТРУБОПРОВОДА ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ВОЛН ДАВЛЕНИЯ ВО ВНУТРЕННЕЙ ЖИДКОСТИ

Зарипов Д.М.

Институт механики Уфимского научного центра РАН, Уфа

Рассматриваются изгибные колебания горизонтальной и вертикальной труб, заполненных жидкостью. В жидкости распространяется гармоническая волна давления. На концах ставятся граничные условия шарнирного закрепления или защемления. Предполагается, что прогиб трубы w мал по сравнению с его длиной L, угол поворота поперечного сечения мал по сравнению с единицей, поперечное сечение трубы при ее изгибе не изменяет своей геометрии. Средняя скорость движения жидкости в трубе принимается равной нулю. Механизм возникновения колебаний обусловлен взаимодействием изменения во времени внутреннего давления и изменением кривизны упругой линии трубы. Нелинейность системы обусловлена взаимодействием продольного усилия в трубе и также кривизны упругой линии.

Нелинейное уравнение изгибных колебаний трубы имеет вид:

$$EI\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \frac{EF}{2L(1+\lambda)}\left(\int\limits_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\right)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \varepsilon\frac{\partial w}{\partial t} + m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q_0 + q, \quad (1)$$

где F, I — площадь и момент инерции сечения, E — модуль упругости, ε — коэффициент трения, $q_0 = g(m + m_f)$ — постоянная распределенная нагрузка на горизонтальную трубу, g — гравитационное ускорение. При выводе (1) учтено, что опоры допускают перемещение трубы в осевом направлении. Соответствующий коэффициент линейно-упругой податливости опор обозначен через λ. Таким образом учтены граничные условия относительно осевого перемещения.

С учетом инерционной силы общая распределенная боковая нагрузка на трубу со стороны жидкости равна:

$$q = -m_f\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \pi r_0^2\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,t)\frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

где $m = F\rho$, $m_f = F_f\rho_f$, $F = \pi(r^2 - r_0^2)$, $F_f = \pi r_0^2$, r, r_0 — внешний и внутренний радиусы трубы, ρ, ρ_f — плотности материала стенки и жидкости.

Давление в жидкости состоит из постоянной и переменной частей:

$$p(x,t) = p_0 + P\sin(\omega\, t - \alpha\, x).$$

Здесь $\alpha = 2\pi/l = \omega/c$ — волновое число, ω, c, l — круговая частота, скорость звука и длина волны давления соответственно.

Принимаются два типа граничных условий для функции прогиба:

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{или} \quad w = \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, L.$$

В качестве начальных условий берутся нулевые, если труба начинает движение из прямолинейного положения без начальной скорости. Рассмотрены и другие начальные условия, в том числе и те, которые соответствуют равновесному положению трубы под действием распределенной нагрузки q_0 и статического внутреннего давления p_0.

Для решения поставленной задачи разработана итерационная процедура, для которой доказана сходимость с любого начального приближения, сводящая решение исходной нелинейной задачи к последовательности линейных задач с постоянными коэффициентами. Это позволило на каждой итерации выписывать решение в виде ряда по собственным функциям оператора четвертой производной, подчиненного соответствующим однородным краевым условиям задачи. Разработана программа, реализующая итерационную процедуру решение задачи для обоих типов краевых условий.

Определены условия возникновения нелинейного резонанса. Установлено, что при резонансных частотах изменения давления колебания могут иметь характер биений, что объясняется взаимодействием нелинейных вынужденных и параметрических колебаний.

Определена критическая величина внутреннего давления, при превышении которой возникают дополнительные положения равновесия, причем промежуточное положение равновесия является неустойчивым. Проведен параметрический анализ влияния амплитуды и частоты волны давления на характер возникающих колебаний трубы. Показано существование различных режимов колебаний: периодических, квазипериодических, хаотических при изменении частоты или амплитуды волны давления. Установлено, что при величине давления, существенно меньшей критического значения, при любых частотах возбуждения наблюдаются лишь периодические колебания малой амплитуды. Колебания большой амплитуды, в том числе и хаотические, возникают, когда внутреннее давление превышает критическое значение. Причем, для возникновения хаотических колебаний необходимо, чтобы частота волны давления была согласована с частотой свободных колебаний трубы.

УСЛОВИЯ РЕАЛИЗАЦИИ СТРОГО СИММЕТРИЧНОГО И АСИММЕТРИЧНОГО ТЕНЗОРОВ НАПРЯЖЕНИЙ, ОТРЫВ ПОТОКА И ВИХРЕВЫЕ ВОЛНЫ

Захаренков М.Н.

Брянский государственный университет имени И.Г.Петровского

Показывается, что для несжимаемой сплошной среды при постоянной вязкости использование строго симметричного тензора напряжений требует во втором приближении выполнения условия

$$\Omega + dx\frac{\partial\Omega}{\partial x} + dy\frac{\partial\Omega}{\partial y} = 0$$

где Ω-завихренность.

При численном моделировании это условие сводится к уравнению

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} + u'\frac{\partial\Omega}{\partial x} + v'\frac{\partial\Omega}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

где u', v' – возмущения компонент скорости.

Выполнение (1) приводит к развитию конвективной неустойчивости течения. Этот тип неустойчивости встречается во многих численных экспериментах. Используя (1), приходим к уравнению для возмущений завихренности

$$\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial t} - u'\frac{\partial\Omega'}{\partial x} - v'\frac{\partial\Omega'}{\partial y} = -\Delta\Omega' \tag{2}$$

где $\bar{\Omega}$ – осредненная завихренность, Ω' – возмущения завихренности.

Из (2) следует, что возмущения завихренности распространяются против возмущений скорости потока, а энергия возмущений завихренности кумулируется осредненной завихренностью.

Многочисленные подтверждения этого вывода можно найти в расчетах обтекания профиля NACA0012 при нулевом угле атаки и числах Рейнольдса Re =10000-40000, где в следе наблюдаются вихревые волны, усиливающиеся при увеличении числа Re. Из анализа (2) следует объяснение эффекта «вихревого запирания» первого пристеночного слоя завихренности при Re=30000, а также объяснение формирования вихревых пятен .

При учете зависимости вязкости от температуры и допущении асимметрии тензора напряжений при обтекании профиля NACA0012 при Re=10000 и угле атаки 5^o наблюдается развитие стартового вихря и коэффициент подъемной силы достигает значения близкого к известному из эксперимента. При нулевом угле атаки и Re=10000 получено обтекание с развитием симметричной зоны отрыва потока, которая замыкается в следе за профилем, а не на задней кромке, как при постоянной вязкости. При этом развития вихревых волн не наблюдается.

РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ЗАДАЧИ СИНХРОНИЗАЦИИ МАЙХИЛЛА

Захарчук И.И

Военно-космическая академия имени А.Ф.Можайского, Санкт-Петербург

Задача синхронизации вычислительных процессов занимает одно из центральных мест в проблематике параллельных вычислений. Классической постановкой задачи синхронизации является сформулированная Майхиллом в 1957 году задача об одновременном включении частей самовоспроизводящей машины Неймана, впоследствии известная как задача о синхронизации цепи стрелков (firing squad synchronization problem — FSSP). Формализуем задачу в терминах теории клеточных автоматов. Клеточный автомат (cellular automata) $\mathcal{K}$ есть упорядоченное множество из четырех компонент $\mathcal{K} =< \mathbb{Z}^d, N, A, \varphi >$, где $\mathbb{Z}^d$ — множество d-мерных векторов с целочисленными координатами — клеточное пространство; N — конечное множество мощности m векторов $N \subset \mathbb{Z}^d$, $N = \{\mathbf{n}_i \mid \mathbf{n}_i = (x_{1i}, \ldots, x_{di})\}$, $\quad \exists \mathbf{n}_i = \mathbf{0}$, $i = 1, \ldots m$

с нулевым вектором — шаблон соседства клетки; A — конечное множество мощности k состояний клетки с выделенным состоянием покоя $\varnothing$ — алфавит клеточного автомата; φ — локальная функция переходов, определенная в дискретные моменты времени и изменяющая состояние клетки, являющейся нулевым элементом в шаблоне, в зависимости от состояний клеток, составляющих шаблон соседства $\varphi : A^m \to A$, при этом $\varphi(\varnothing, \varnothing, \ldots, \varnothing) = \varnothing$. Состояние всех клеток на момент времени t образует текущую конфигурацию $c_t : \mathbb{Z}^d \to A$. Минимальное время синхронизации $(2p-2)$, где p — число «непустых» клеток, получено для случая $d = 1$, $m = 3$, $k = 7$. Для ординарных ($m = d+1$ или $k = 2$) клеточных автоматов справедливы следующие решения.

Теорема 1. Клеточный автомат $\mathcal{K} = f(d = 1, m = 2, k \leq 56)$ решает FSSP за время $4(p-1)$.

Теорема 2. Клеточный автомат $\mathcal{K} = f(d = 1, m = 18, k = 2)$ решает FSSP за время $2(p-1)$.

Теорема 3. Клеточный автомат $\mathcal{K} = f(d = 2, m = 3, k \leq 72)$ решает FSSP за время $2(h + l - 2)$, где h, l — стороны прямоугольника, образованного начальной конфигурацией c_0.

Результаты могут быть распространены для случая $d > 2$. При $d = 2$ данная теорема позволяет получить время решения, на порядок меньше существующего. Пусть клеточный автомат подвержен сбоям, причем причем состояния любых двух соседних клеток в каждый такт работы клеточного автомата соответствуют локальной функции переходов — 3-разделенные сбои.

Теорема 4. Клеточный автомат $\mathcal{K} = f(d = 1, m = 3, k \leq 343)$ решает FSSP в условиях 3-разделенных сбоев за время $2(p-1)$.

О СИСТЕМАХ ТЕТРАЭДРОВ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ДЕЛОНЕ ПУСТОТЫ ШАРА

Игумнов А.Ю.

Волгоградский государственный университет, Волгоград

Понятие пустого шара для произвольной системы точек было введено Б.Н. Делоне в 1924 году. С этим понятием связаны задачи о триангуляции и о разбиении множеств (диаграммы Вороного).

Определение *([1])Система $\mathcal{T}$ невырожденных тетраэдров удовлетворяет условию пустоты шара, если для каждого тетраэдра T этой системы описанный вокруг него открытый шар B_T не содержит вершин тетраэдров этой системы.*

Пусть f – отображение, заданное на множестве вершин тетраэдров системы

$\mathcal{T}$ и $T = a_1 \dots a_{n+1}$ – тетраэдр системы $\mathcal{T}$. Обозначим $T_f = f(a_1)\dots f(a_{n+1})$, $\mathcal{T}_f$ — семейство тетраэдров вида T_f.

Постановка задачи (В. М. Миклюков). *Пусть $f : \mathcal{T} \to \mathcal{T}_f$ — отображение, удовлетворяющее условию: для любых двух вершин x', x'' тетраэдров системы $\mathcal{T}$ выполнено неравенство*

$$l\,|x' - x''| \leq |f(x') - f(x'')| \leq L\,|x' - x''|, \text{ где } l > 0.$$

Требуется определить условия (достаточные) на коэффициенты l, L, обеспечивающие при указанном отображении сохранение условия пустоты шара.

В работе дается решение задачи для систем тетраэдров, удовлетворяющих условиям: 1) всякий тетраэдр системы невырожден; 2) тетраэдры системы не имеют общих внутренних точек; 3) любая ограниченная область имеет общие точки только с конечным числом тетраэдров.

Автор выражает признательность В.М. Миклюкову за постановку задачи и полезные обсуждения в ходе работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. B. Delaunay. Sur la sphère vide. A la mémoire de Georges Voronoï. Известия Академии наук СССР, 1934, № 6, с. 793–800.
2. А.Ю. Игумнов. Об отображениях, сохраняющих условие пустоты сферы. Записки семинара "Сверхмедленные процессы" Вып.2. ВолГУ, Лаб. сверхмедленных процессов; под ред. д-ра физ.-мат. наук, проф. В.М. Миклюкова. — Волгоград: Изд-во ВолГУ. 2007, с. 65-72.

О ПОСТРОЕНИИ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ ВЫПУКЛЫХ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Ишмухаметов А.З.

Вычислительный центр РАН им. А.А. Дородницына, Москва

В теории оптимального управления хорошо известен метод моментов, разработанный Н.Н. Красовским для систем с сосредоточенными параметрами и развитый для систем с распределёнными параметрами в работах А.Г. Бутковского. Этот метод применим в случае, когда известно, что систему можно перевести из заданного в конечное состояние (управляемость системы).

В случае, когда система возможно неуправляема, то естественно ставится задача перевода как можно ближе к конечному состоянию. Эта задача сводится к обобщённой проблеме моментов [1].

В случае, когда заданы несколько ограничений, а также при более общих условиях на управления, метод можно обобщить с помощью использования теории двойственности. А именно: он заключается в нахождении множителей Лагранжа в конечномерной, двойственной к исходной регуляризованной задаче.

Используя методы проекции и условного градиентов, разработан регуляризованный численный метод [2].

Отметим, что эти методы являются конечношаговыми для внутренних процедур, при этом используются аппроксимирующие задачи. А именно: если задана исходная задача

$$J(u) \to \inf, u \in U \subset H,$$

где H - некоторое гильбертово пространство, то строится последовательность аппроксимирующих конечномерных задач

$$J_N(u) \to \inf, u \in U_N \subset H_N, N = 1, 2....$$

Для решения аппроксимирующих задач можно использовать вышеописанные методы. Даётся обоснование сходимости по функционалу и управлению.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 07-01-00416).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васильев Ф.П., Ишмухаметов А.З., Потапов М.М.* Обобщённый метод моментов в задачах оптимального управления. М.: Изд-во МГУ, 1989.
2. *Ишмухаметов А.З.* Регуляризованные приближённые методы проекции и условного градиента с конечношаговыми внутренними алгоритмами // Вычисл. матем. и матем. физ.. 2003. Т. 43. N. 12. С. 1896–1909.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТОДОМ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ РАЗРУШЕНИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ НАНОЧАСТИЦ

Киселев С.П.

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

Методом молекулярной динамики решено несколько задач о разрушении металлических наночастиц в результате их нагружения сходящейся ударной волной. Подробно исследованы следующие две задачи. Задача о разрушении одной сферической композитной наночастицы, состоящей из медной (Cu) матрицы и сферического включения из молибдена (Mo). Задача о компактировании четырех наночастиц меди и четырех наночастиц молибдена за ударной волной и разрушении возникшего компакта в волне разрежения. Показано, что рост пор и разрушение происходят в менее прочном компоненте

Cu в окрестности контактной границы Cu-Mo. Это связано с пластическими деформациями и нарушением идеальности решеток в композите Cu-Mo в окрестности контактной границы. Критическое напряжение разрушения в компакте Cu-Mo меньше, чем в композите Cu-Mo. Это связано с возникновением значительных пластических деформаций и плавлением наночастиц Cu при компактировании. При разрушении наночастиц имеет место масштабный эффект как при разрушении макротел.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (код проекта 08-01-00108-а), заказного проекта Президиума СО РАН № 5, Интеграционного проекта СО РАН № 106, гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ № НШ-4292.2008.1.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ С КОСИММЕТРИЧНЫМ СЕМЕЙСТВОМ РАВНОВЕСИЙ

Ковалева Е.С., Цибулин В.Г.

Южный Федеральный Университет, Ростов-на-Дону

Изучается динамика системы уравнений в частных производных, описывающая взаимодействие трех сосуществующих в пределах одного ареала популяций. Данная модель относится к классу косимметричных задач, в которых возникают континуальные семейства равновесий с переменным спектром устойчивости. На основе специального варианта метода конечных разностей изучена динамика системы и найдены различные сценарии распада семейств равновесий при возмущении краевых условий.

Рассматривается система нелинейных параболических уравнений, которая является обобщением модели [1], предложенной для описания динамики популяций:

$$\dot{w} = Kw'' + Mw' + F(w, w') \equiv \Phi(w)\,, \tag{1}$$

$$w(x,0) = w^0(x)\,, \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$w(0,t) = \xi, \quad w(a,t) = \gamma\,, \quad x \in \partial\Omega\,, \tag{3}$$

Здесь w – вектор плотностей распределения (концентраций) популяций. Матрица диффузионных коэффициентов диагональна $K = diag(k_1, k_2, k_3)$.

Рассматриваемая модель при $\xi = \gamma = 0$, $\eta_i = \eta$, $(i = 1, 2, 3)$ обладает линейной косимметрией $\Psi(w) = BK^{-1}Mw$, где $B = diag(1, -1, -1)$.

Для численного анализа системы (1)–(3) использовался конечно-разностный подход [2] и метод прямых. На интервале $[0, a]$ вводилась равномерная сетка $x_j = jh$, через $w_{i,j}$ обозначено значение i-ой концентрации w_i в узле x_j.

Для сохранения свойства косимметрии дискретизация линейных операторов w', w'' правой части уравнения (1) проводится на основе разностных отношений второго порядка точности, для аппроксимации нелинейности вида $u'v$ построена специальная формула:

$$d_j(u,v) = \frac{2}{3}\frac{(u_{j+1}-u_{j-1})}{2h}v_j + \frac{1}{3}\frac{(v_{j+1}-v_{j-1})}{2h}u_j - \frac{1}{3}\frac{u_{j+1}v_{j+1}-u_{j-1}v_{j-1}}{2h}.$$

Расчет нестационарных и устойчивых стационарных режимов проводился методом Рунге–Кутта 4-го порядка. Вычисление семейств равновесий при $\xi = \gamma = 0$ осуществлялось на основе подхода, описанного в [2]. Начальное приближение к одному из равновесий семейства находилось методом установления или методом продолжения по параметру.

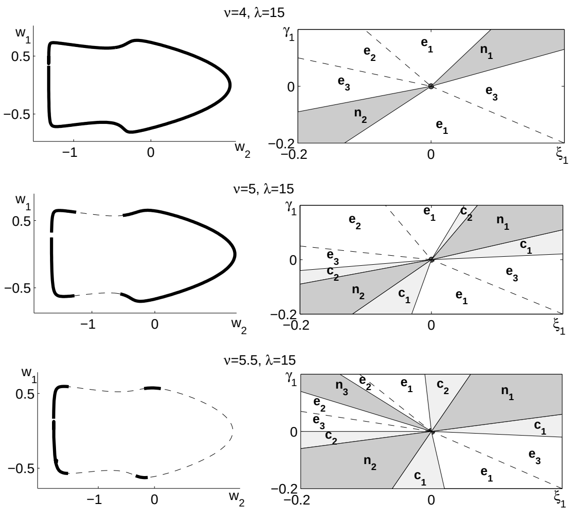


Рис. 1: Карта режимов (справа), ответвляющихся от семейств равновесий (слева) с устойчивыми (сплошная линия) и неустойчивыми (пунктир) дугами: предельные циклы – области n_1, n_2, n_3; изолированные равновесия – области e_1, e_2, e_3, сосуществование предельного цикла и равновесия области – c_1, c_2

На рис. 1 представлены карты режимов на плоскости параметров ξ_1 и γ_1 при малых возмущениях краевых значений ($|\xi_1|, |\gamma_1| \le 0.2$), $\xi_i, \gamma_i = 0, i = 2, 3$, $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 10$. Для различных параметров линейного переноса λ, ν в левой части рис. 1 даны фазовые проекции семейства стационарных состояний на плоскость $W_1 = w_1(a/2, t), W_2 = w_2(a/2, t)$. Пунктиром обозначены дуги, состоящие из неустойчивых равновесий. Если при $\xi_1 = \gamma_1 = 0$ семейство было полностью устойчиво ($\lambda = 15, \nu = 4$), то при ($|\xi_1| + |\gamma_1| \neq 0$) появляются либо предельные циклы (области $n_1,\ n_2,\ n_3$), либо изолированные равновесия ($e_1,\ e_2,\ e_3$). Для семейства, состоявшего из дуг устойчивых и неустойчивых равновесий ($\lambda = 15, \nu > 4$), картина распада становится сложнее: появляются также области сосуществования нестационарных режимов и изолированных равновесий, помеченные на рис. 1 буквами c_1, c_2.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (08-01-00734), гранта поддержки ведущей научной школы (проект НШ-5747.2006.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ковалева Е.С., Цибулин В.Г., Фришмут К.* Динамика модели популяционной кинетики // Мат. моделирование. 2008. Т. 20. С. 85–92.
2. *Frischmuth K., Tsybulin V. G.* Families of equilibria and dynamics in a population kinetics model with cosymmetry // Physics Letters **A**. 2005. V. 388. P. 51–59.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТРАНСФОРМАЦИИ СТРУКТУРНО НЕУСТОЙЧИВЫХ МАГНИТНЫХ КОНФИГУРАЦИЙ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Костомаров Д.П.

Факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, Москва

Магнитное пересоединение (перезамыкание) представляет собой фундаментальный процесс, отличающийся большим разнообразием аспектов и проявлений в астрофизической, космической и лабораторной плазме. Пересоединение представляет по существу перестройку топологии магнитного поля, обусловленную конечной проводимостью плазмы. Это изменение приводит к высвобождению накопленной магнитной энергии, которая может трансформироваться в энергию быстрых частиц и излучения. Магнитное пересоединение сопровождается образованием нелинейных когерентных структур типа токовых слоев и так называемых «замков». В работе численно и аналитически изучен процесс формирования токового слоя в трехмерной магнитной конфигурации и определены характеристики плазмы для формирования трехмерного токового слоя.

Проблема магнитного перезамыкания тесно связана с проблемой структурной устойчивости векторных полей. Динамическая система структурно устойчива, если при всяком достаточно малом изменении векторного поля возмущенная система эквивалентна исходной. Поскольку в процессе спонтанного и вынужденного магнитного перезамыкания топология поля изменяется, то естественно предположить, что структурно неустойчивая конфигурация перейдет в структурно устойчивую.

Большой интерес представляет анализ процесса трансформации структурно неустойчивых магнитных конфигураций в структурно устойчивые с использованием методов теории катастроф. С помощью теории Морса предсказан распад особой точки 3-го порядка.

Для численного решения системы уравнений магнитной гидродинамики создан оригинальный параллельный магнитогидродинамический код для моделирования поведения плазмы в рамках трехмерной и двумерной модели. Применение методов параллельного программирования позволяет увеличить размер сетки по каждой координате в 5–10 раз и сократить время численного решения этой задачи на высокопроизводительных кластерных системах примерно в 5 раз. Расчеты проводились на мультипроцессорном суперкомпьютере *IBM eServer p690 Regatta,* установленном на факультете ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова.

МАЛОПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ УДАРА

Краус Е.И., Фомин В.М., Шабалин И.И.

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

В рамках модели Ми – Грюнайзена, на основе функции Грюнайзена Молодца А.М. [1], построено термодинамическое уравнение состояния твердой фазы в приближении Дебая с минимальным числом параметров, в котором “холодные” давления и энергия получены в аналитическом виде из обобщенной формы функции Грюнайзена [2]. В работе разработана процедура и установлен вид объемной зависимости коэффициента Грюнайзена с использованием параметра t для различных квазигармонических моделей (теория Ландау - Слэйтера [3, 4], Дуглейла - Макдональда [5], Зубарева – Ващенко [6]). При этом, варьируя параметром t, возможно использование для конкретного материала одной из теорий, наилучшим образом описывающей экспериментальные данные на ударной адиабате.

$$\gamma_p(V) = -\left(\frac{2-t}{3}\right) - \frac{V}{2}\left[\frac{\frac{d^2}{dV^2}\left(P_x V^{\frac{2t}{3}}\right)}{\frac{d}{dV}\left(P_x V^{\frac{2t}{3}}\right)}\right]$$

На основе упруго-пластической модели и с привлечением созданного уравнения состояния численно решена задача столкновения реактора космической ядерной энергетической установки с поверхностью Земли в двумерной постановке [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Молодец А.М.* Функция Грюнайзена и нулевая изотерма трех металлов до давлений 10 ТПа // ЖЭТФ. 1995. Т.107. № 3. С. 824–831.
2. *Краус Е.И.* Малопараметрическое уравнение состояния твердого вещества при высоких плотностях энергии // Вестник НГУ. Серия: Физика. 2007. Т.2, вып.2. С.65–73.
3. *Ландау Л.Д., Станюкович К.П.* Об изучении детонации конденсированных взрывчатых веществ // ДАН СССР. 1945. Т.46. С. 399–406.

4. *Slater I.C.* Introduction in the chemical physics. New-York-London: McGraw Book company, Inc., 1935.–239 p.
5. *Dugdale J.S., McDonald D.* The thermal expansion of solids // Phys. Rev. 1953. Vol.89. P.832–851.
6. *Зубарев В.Н., Ващенко В.Я.* О коэффициенте Грюнайзена // ФТТ. 1963. Т.5. С.886–891
7. *Краус Е.И., Фомин В.М., Шабалин И.И.* Моделирование процесса соударения сложных двумерных тел о деформируемую преграду // Вычислительные технологии. 2006. Т.11. С.104–107.

ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ЛЕММА КЕЛЛОГА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СХОДИМОСТИ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СЛАУ

Крукиер Б.Л., Чикина Л.Г.
ЮГИНФО РГУ, Ростов-на-Дону

Оператор перехода итерационного метода

$$B(\omega)\frac{x_{k+1}-x_k}{\tau}+Ax_k=f,\quad k=0,\ 1,\ 2,... \tag{1}$$

где A и B невырожденные линейные операторы, представим в виде:

$$G\left(\tau,\omega\right)=\left(E+0.5\omega F\right)^{-1}\left(E+\left(0.5\omega-\tau\right)F\right), \tag{2}$$

где $F=(B(\omega)-0.5\omega A)^{-1}A$.

Лемма 1. *Пусть α,β –действительные числа, причем $\alpha\geq 0$. Если F и $(E+\alpha F)$ – невырожденные операторы, то условие*

$$-\alpha\leq\beta\leq\alpha+2\lambda_{\min}\left(F^{-1}\right)_0, \tag{3}$$

где $\left(F^{-1}\right)_0=\frac{1}{2}\left(F^{-1}+F^{-T}\right)$, *является достаточным для выполнения оценки*

$$\left\|\left(E+\alpha F\right)^{-1}\left(E-\beta F\right)\right\|\leq 1. \tag{4}$$

Спектральный аналог леммы Келлога

Пусть

$$\lambda_k\left(F\right)=Re\lambda_k\left(F\right)+iIm\lambda_k\left(F\right)$$

собственные числа оператора F. Запишем связь между собственными числами оператора перехода (2) и оператора F

$$\lambda_k\left(G\left(\tau,\omega\right)\right)=\frac{1+\left(0.5\omega-\tau\right)\lambda_k\left(F\right)}{1+0.5\omega\lambda_k\left(F\right)}. \tag{5}$$

Лемма 2. *Пусть* α, β *–действительные числа, причем* $\alpha \geq 0$. *Если* F и $(E + \alpha F)$ *– невырожденные операторы, то условие*

$$-\alpha < \beta < \alpha + 2 \min_k Re\lambda_k \left(F^{-1}\right). \tag{6}$$

является необходимым и достаточным для выполнения оценки

$$\left|\lambda_k \left(G\left(\tau, \omega\right)\right)\right|^2 < 1. \tag{7}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ. Гранты №06-01-00038-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А.А., Николаев Е.С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
2. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. М: Наука, 1989

ОСОБЕННОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ РАЗРАБОТКИ МЕСТОРОЖДЕНИЙ НЕФТИ И ГАЗА

Кудряшов И.Ю., Максимов Д.Ю.

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва

В работе обсуждаются методы, использованные при распараллеливании гидродинамического симулятора МКТ, разработанного сотрудниками ИПМ им. М.В. Келдыша РАН при поддержке российской группы компаний TimeZYX.

При помощи МКТ возможно моделирование фильтрации в анизотропных средах с использованием полного тензора проницаемости, учёт нелинейного притока при совместной добыче из несвязанных пропластков, прямое моделирование геолого-технических мероприятий, таких как гидроразрыв пласта. Для проведения весьма ресурсоёмких расчётов по прогнозу и адаптации гигантских моделей месторождений нефти и газа была создана параллельная версия МКТ, работающая на высокопроизводительных вычислительных кластерах.

Представлен алгоритм рационального разбиения расчётной области на произвольное число подобластей, обеспечивающий равномерное распределение активных ячеек по процессорам (ядрам), что позволило уменьшить время счёта на треть и более по сравнению с простым равномерным разбиением, которое использует, например, симулятор Eclipse 100 (Schlumberger).

Тем самым подзадачи обладают примерно одинаковой сложностью и требуют для своего решения примерно одинакового количества ресурсов, что говорит о балансировке нагрузки.

Применённый алгоритм в большой мере позволяет эффективно сокращать время счёта задачи при увеличении числа процессоров, показывая хорошую масштабируемость. Таким свойством обладают не все параллельные симуляторы. При увеличении размера модели вместе с числом процессоров время счёта увеличивается не более чем на 40%.

Проверена возможность расчёта очень крупных реальных моделей, в том числе содержащих более 500 млн. ячеек. При малом числе скважин эффективность близка к 95%, для реальной модели более чем с 5000 скважин эффективность составляет 60–65%.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00836).

ВОЗМОЖНЫЕ РЕЖИМЫ КУМУЛЯЦИИ ПРИ СХЛОПЫВАНИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ОБЛИЦОВКИ

Кукуджанов В.Н.

Институт проблем механики Российской академии наук, Москва

Метод расщепления [1, 2] был применен к решению задачи об образовании кумулятивной струи при действии детонационной волны и продуктов детонации на металлическую облицовку осесимметричного заряда взрывчатого вещества. Материал облицовки описывается многомасштабной моделью связной термупруговязкопластической среды с учетом зарождения и роста дефектов, а также термическим разупрочнением в следствие диссипации в полосах локализации сдвига пластической деформации [1]. Модель позволяет правильно описать масштабный эффект и вязкое разрушение материала вплоть до его фрагментации.

Рассматривались 3 возможных режима кумуляции: а) схлопывание конической облицовки с образованием высокоскоростной кумулятивой струи, б) интенсивное натекание материала на ось с формированием из облицовки высокоскоростного компактного элемента, в) выворачивание облицовки без выраженного кумулятивного эффекта.

Задача решалась с помощью адаптирующихся Лагранжа-эйлеровых сеток методом конечных элементов [3]. Во всех рассмотренных режимах учитывалось разрушение облицовки и струи и фрагментация разрушенного материала.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00523) и Программы № 13 Отделения энергетики, машиностроения, механики и процессов управления Российской Академии наук.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кукуджанов В.Н.* Метод расщепления упругопластических уравнений // Известия. РАН, МТТ. 2004. N. 1. С. 98–108.
2. *Кукуджанов В.Н.* Связанные модели упругопластичности и поврежденности и интегрирование их уравнений // Известия РАН, МТТ. 2006. N. 6. С. 103–135.
3. *Заппаров К.И., Кукуджанов В.Н.* Математическое моделирование задач импульсного деформирования, взаимодействия и разрушения упругопластических тел. М.: ИПМ АН СССР. Препринт №280. 1986. 68 с.

ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ВЫРОЖДЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ВЫСОКОЙ РАЗМЕРНОСТИ

Ларченко В.В.

Донской государственный технический университет,Ростов-на-Дону

Пусть $N = \{1, 2, ..., n\}, n < \infty, i \in N, \mathcal{D} = (-1, 1) \times (-\infty, \infty), \triangle^{\pm}(\cdot) = \partial^2_{xx}(\cdot) \pm \partial^2_{zz}(\cdot),\ \delta \in (-r, r), r \ll 1,\ \sum_{j=1}^{n} E_{ij} = \sum_{i=1}^{n} c_i = 1,\ \lambda^* = min_k\{\lambda_k\}$.

На примере вторичного конвективного течения вязкой несжимаемой локально неоднородной жидкости предлагается краевая задача:

$$(1)\quad (x, z) \in \mathcal{D},\ \triangle\mathfrak{T} + \delta\eta(x)(1 - sign|\lambda - \lambda^*|) = \sum_{i=1}^{n} c_i < \bigtriangledown\mathfrak{Z}^j \circ \bigtriangledown\mathfrak{T} >,$$

$$\lambda \triangle^2 \mathfrak{Z}^i + \beta_i\partial_x\mathfrak{T} = \sum_{j=1}^{n} E_{ij}[< \bigtriangledown\mathfrak{Z}^j \circ \triangle^+(\bigtriangledown\mathfrak{Z}^i) > + < \partial^2_{xz}\mathfrak{Z}^{ij} \circ \triangle^-\mathfrak{Z}^{ij} >],$$

$$x = \pm1,\ \ \partial_x\mathfrak{Z}^i = \partial_z\mathfrak{Z}^i = 0,\ \mathfrak{T} = \theta x. \quad < u \circ v >=< u, Jv >_{\mathbb{E}_2}, \forall u, v \in \mathbb{E}_2.$$

Здесь $\mathfrak{Z}^1, \mathfrak{Z}^2, ..., \mathfrak{Z}^n, \mathfrak{T}-$ искомые функции независимых переменных (x, z), $c_i, E_{ij}-$ известные коэффициенты, $\lambda, \beta_i, \delta, \theta-$ числовые, а $\eta(x)-$ функциональный параметры,$\{\lambda_k\}-$ некоторая последовательность критических чисел [1], $\mathbb{E}_2-$ евклидово пространство размерности два, $J-$ кососимметрическая матрица 2×2, $\mathfrak{Z}^{ij} = colon(\mathfrak{Z}^i, \mathfrak{Z}^j)$.

О п р е д е л е н и е. Пространство искомых функций $\mathfrak{Z}^1, \mathfrak{Z}^2, ..., \mathfrak{Z}^n, \mathfrak{T}$ называется вырожденным, если его размерность не совпадает с топологической размерностью области $\mathcal{D}$.

Неоднородность континуума заключается в том, что в каждой точке $\mathcal{A}(x, z) \in \mathcal{D}$ его плотность ρ, теплоёмкость c и коэффициент линейного расширения β могут принимать любое из n значений $(\rho_1, \rho_2, ..., \rho_n), (c_1, c_2, ..., c_n)$, $(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n), \rho_i > 0, c_i \geq 0$, причём средние $< \rho >, < c >$ равны соответственно $|\rho|, |c|$, где $|(\cdot)| = (\cdot)_1 + (\cdot)_2 + ... + (\cdot)_n$. В модели каждый дифференциальный элемент среды $\rho_i\, dxdz$ имеет свои скорости $v^i_x = -\partial_z\mathfrak{Z}^i, v^i_z = -\partial_x\mathfrak{Z}^i$.

Вычисления проводились для вертикальной полосы в однородном гравитационном поле алгоритмами из работы [1]. Критические числа $\{\lambda_k\}$и их кратность, собственные функции, включая группу симметрии $Sp\ (2n, R)$, совпадают с соответствующими величинами для связной системы Навье-Стокса и теплопроводности, если $\beta_1 = ... = \beta_n = \beta$. Однако условия существования вторичного течения в R^2 у них разные. Задача (1) позволяет, кроме того, оценить влияние осреднений β на последовательность $\{\lambda_k\}$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №08-01-00207-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ларченко В.В.* Алгоритмизация вычислений на симплектическом базисе //Диф. уравнения. 2007. Т. 43, N. 3. С. 411–422.

ПЕРЕНОС ЗАРЯДА СОЛИТОНАМИ В ДНК

Лахно В.Д.

Институт математических проблем биологии РАН, Пущино

Показано, что в однородных синтетических полинуклеотидных цепочках реализуется солитонный механизм переноса заряда. Рассмотрены вопросы о расстоянии, на которое возможен перенос заряда, движение в электрическом поле и подвижность солитонов. Представлены результаты компьютерного моделирования.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ХОЛСТЕЙНОВСКОЙ МОДЕЛИ ПЕРЕНОСА ЗАРЯДА В МОЛЕКУЛЯРНЫХ ЦЕПОЧКАХ С ДИСПЕРСИЕЙ И БЕЗ

Лахно В.Д. Фиалко Н.С.

Институт математических проблем биологии РАН, Пущино

В квазиодномерных системах, к которым относятся биомолекулярные цепочки перенос заряда может осуществляться уединенными волнами – солитонами или поляронами. В исследуемой модели Холстейна молекулярная цепочка приближенно моделируется дискретной цепочкой, состоящей из сайтов (сайты - молекулы или группы сильно связанных атомов, которые взаимодействуют между собой сравнительно слабыми силами). В цепочку привносится избыточный заряд (электрон или дырка). Распространение заряда влияет на движения сайтов, и наоборот, смещение сайта изменяет вероятность нахождения заряда на нем (поляронный механизм взаимодействия). Движение заряда описывается уравнением Шредингера, а колебания сайтов – классическими уравнениями движения. При малых отклонениях от равновесных положений колебания сайтов можно считать гармоническими. Предполагается линейная зависимость взаимодействия заряда со смещениями сайтов. Задача сводится к системе нелинейных связанных квантово-механических и классических обыкновенных дифференциальных уравнений, которая интегрируется численно. Система в обезрамеренном виде для однородной цепочки из N сайтов:

$$\begin{aligned} \frac{db_n}{dt} &= \kappa u_n b_n + \nu b_{n+1} + \nu b_{n-1}, \\ \frac{d^2 u_n}{dt^2} &= -\omega^2 u_n - \xi(u_{n+1} + u_{n-1}) - |b_n|^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь переменные имеют следующий смысл: b_n – амплитуда вероятности нахождения заряда на n-ом сайте, u_n – смещение n-ого сайта из равновесного положения. Коэффициенты η – матричные элементы перехода с n-го на k-ый сайт, κ – константа связи квантовой и классической подсистем, ξ – коэффициент дисперсии.

Как известно, в предельном случае полярона большого радиуса (когда полуширина уединенной волны много больше единицы): без дисперсии ($\xi = 0$, сайты в классической подсистеме не связаны друг с другом) не существует стационарно движущейся уединенной волны; а при $\xi \neq 0$ такое решение существует, т.е. в цепочке может формироваться полярон, движущийся с постоянной скоростью.

Мы провели численное исследование дискретной модели при параметрах, для которых полуширина уединенной волны больше 3. Показано существование решений, сходных с движущимися солитонами, в цепочках без дисперсии. Скорость движущейся уединенной волны со временем уменьшается. Физический механизм убывания скорости обусловлен возбуждением незатухающих колебаний сайтов при движении волны по цепочке (Рис. 1)

Состоянием с наименьшей энергией в однородной цепочке будет стоячая волна. Исследуемая система гамильтонова, т.е. должна сохраняться полная энергия системы 1. По невозмущенной цепочке уединенная волна движется, оставляя за собой колебания сайтов с конечной амплитудой. При этом происходит перераспределение энергии по цепочке, позади волны увеличиваются кинетическая и потенциальная энергия сайтов, и соответственно понижается энергия самой волны. При этом скорость волны уменьшается. Расчеты показывают, что торможение волны происходит нелинейно. Можно задать большую начальную скорость волны (например, когда заряд локализован на одном сайте у края цепочки); при этом расстояние, которое пройдет волна до остановки, может составлять сотни тысяч сайтов (оценка по результатам серии расчетов).

В случае цепочки с дисперсией ($\xi \neq 0$) ситуация теоретически должна

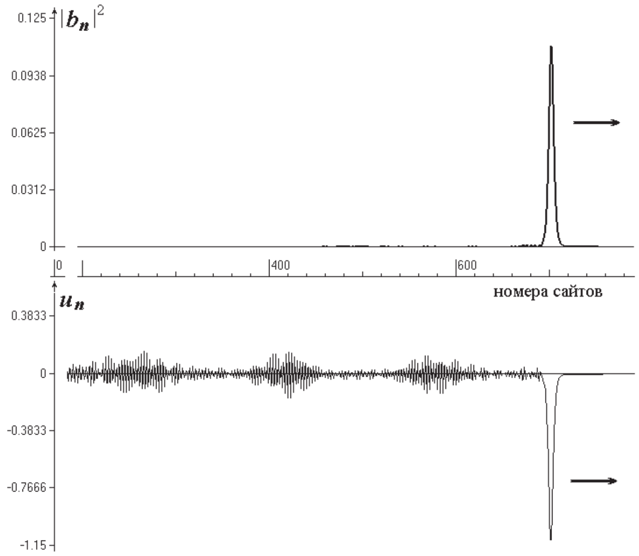


Рис. 1: Уединенная волна движется слева направо. На верхнем графике — вероятности распределения заряда $|b_n|^2$ по сайтам в некоторый момент, на нижнем — смещения сайтов u_n в этот же момент времени. Видно, что за волной остается "шлейф" из колеблющихся сайтов.

быть другой: после волны, движущейся с небольшой скоростью, не должно оставаться "шлейфа" из колеблющихся сайтов, перераспределения энергии нет, и волна движется бесконечно. При проведении численных экспериментов подобного режима найти пока не удалось.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 07-07-00313

К ЗАДАЧЕ ОТРЫВНОГО ОБТЕКАНИЯ ПРОФИЛЯ

Лежнев В.Г.

Кубанский государственный университет, Краснодар

Функция тока $\psi(x)$ задачи обтекания ограниченной области $Q \subset R^2$ с границей S представляется суммой линейной функции $l(x)$ и логарифмического потенциала простого слоя по S с плотностью $q(x)$. Линейная часть определяет скорость на бесконечности $\{u_0, v_0\}$, и требуется определить плотность $q(x)$, $x = (x_1, x_2) \in S$ так, чтобы $\psi(x) = b$ при $x \in S$, где b — постоянная. Функция $g(y)$ существует и единственна для любых u_0, v_0, b.

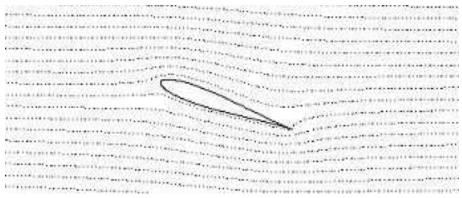
В данной работе вместо локального условия Жуковского-Чаплыгина стекания потока с острой кромки крыла (условие единственности) рассматривается минимизация завихренности на S, т.е. условие минимизации функционала $\Omega = (q, q)_S$, где $(,)$ — скалярное произведение в $L_2(S)$.

Обозначим $q^*(x)$ плотность потенциала Робена для S, $L_2(S) = \{q^*\} \oplus L_2^*(S)$, $E(x)$ — фундаментальное решение уравнения Лапласа. Плотность вихрей имеет вид $q(x) = q_0(x) + \gamma q^*(x)$, $q_0 \perp q^*$. Изменяя γ, получаем все обтекающие S течения для $\{u_0, v_0\}$, минимуму Ω соответствует $\gamma = 0$.

Алгоритм состоит в следующем. Возьмем последовательность точек $z^m \in Q$, удовлетворяющую условию единственности гармонических функций. Система функций $\alpha_m^-(x) = E(z^{m+1} - x) - E(z^m - x)$ полна в $L_2^*(S)$ и линейна независима.

Функция тока $\psi(x) = l(x) + (q(y), E(x-y))_S$ тождественно постоянна в Q. Следовательно, $l(z^{m+1}) - l(z^m) + (q(y), \alpha_m^-(y))_S = 0$. Подставляя аппроксимацию $q_0^N(x) = \sum\limits_1^N c_m \alpha_m^-(x)$ вместо плотности $q_0(x)$ получим систему линейных уравнений для коэффициентов c_m.

Для крыла Жуковского приведены линии тока при $\alpha = 10^0$ ($N = 40$).



Алгоритм вычисления функции $q^*(x)$ представлен в [1].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №06-01-96648.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лежнев В.Г.* Функция тока задачи плоского обтекания, потенциал Робена и внешняя задача Дирихле // ДАН. 2004. Т. 394. N. 5. С. 615–617.

ОПЫТ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МВС ПРИ ОТРАБОТКЕ ИЗДЕЛИЙ РКТ

Липницкий Ю.М., Панасенко А.В., Шкардун А.П.
ФГУП Центральный научно-исследовательский институт машиностроения, Королев

Математическое моделирование процессов, сопутствующих функционированию изделий РКТ, требует больших вычислительных ресурсов для решения сопряженных задач аэромеханики, тепломассообмена, прочности, управления и т.д. С этой целью в ФГУП ЦНИИмаш в течение 2001 - 2008 гг. при первоначальной поддержке РФФИ, и впоследствии Роскосмоса, был создан суперкомпьютерный центр.

В состав суперкомпьютерного центра входят две кластерные системы с пиковой производительностью 2.2 Tflops (T-Edge58) и 0.3 Tflops. При выборе модели процессоров для кластера T-Edge58 было проведено тестирование доступных на тот момент вычислительных узлов на типовой задаче газодинамики, показавшее преимущество по показателю производительность/стоимость узлов с процессорами Xeon 5345 фирмы Intel. В настоящее время кластер ФГУП ЦНИИмаш T-Edge58 занимает 17-ю позицию в рейтинговом списке TOP50.

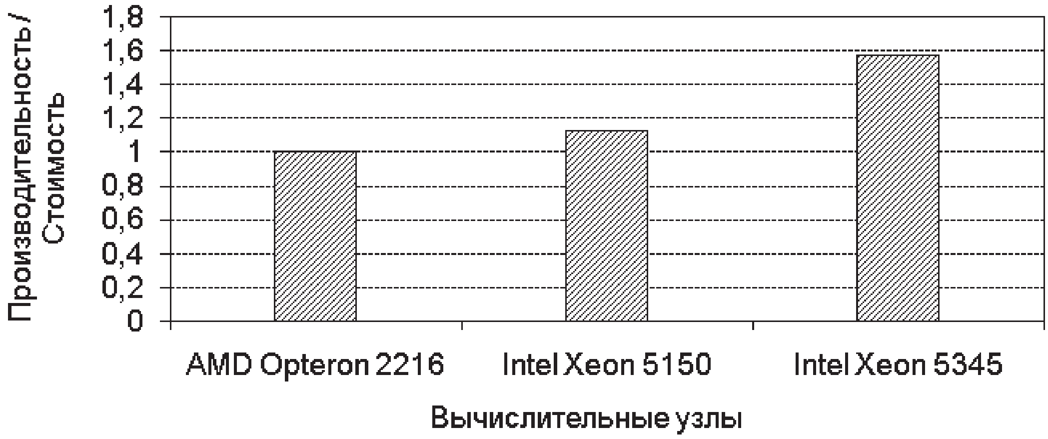


Рис. 1: Результаты тестирования различных вычислительных узлов

Разработано специализированное параллельное прикладное программное обеспечение, предназначенное для отработки характеристик изделий РКТ, позволяющее решать широкий класс современных прикладных задач.

В докладе приводятся примеры прикладных задач, реализация которых основана на использовании пакета программ, специально разработанного для расчетной отработки изделий РКТ.

Работа выполнена в рамках научной школы НШ-2496.2008.8 и при финансовой поддержке РФФИ, проекты № 07-01-00530, 07-01-13505.

ИССЛЕДОВАНИЕ СВЕРХЗВУКОВЫХ КОНЦЕВЫХ ВИХРЕЙ И ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

Луцкий А.Е.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

Возросший интерес к созданию высокоскоростных транспортных систем различного назначения выявил необходимость изучения концевых вихрей, их характеристик, распространения в спутном потоке и взаимодействия с ударными волнами.

Для дозвуковых режимов полета все эти вопросы к настоящему времени достаточно хорошо изучены экспериментальными, теоретическими и численными методами. Однако, для сверхзвуковых скоростей экспериментальных данных получено довольно мало [1,2]. Весьма ограниченным является также объем численных исследований структуры сверхзвуковых концевых вихрей [3]. Большинство работ по численному моделированию взаимодействия вихрей с ударными волнами базируется на упрощенных моделях ядра вихря. Для пополнения весьма ограниченной базы экспериментальных данных о течении в ядре сверхзвукового концевого вихря, уточнения его модели и валидации численных алгоритмов в ИТПМ им. С.А.Христиановия СО РАН и ИПМ им. М.В.Келдыша РАН был выполнен комплекс исследований, результаты которых представлены ниже.

В сверхзвуковой аэродинамической трубе Т-313 ИТПМ им. С.А.Христиановича СО РАН проведено исследование взаимодействия вихревого следа за крылом с головной ударной волной перед цилиндром [4,5]. Эксперименты выполнены при числах Маха 3, 4, 6 и углах атаки крыла до 20 градусов. При отсутствии взаимодействия наблюдалась классическая стационарная картина обтекания плоского торца с отошедшей ударной волной и типичным распределением давления. Установка крыла перед продольно обтекаемым цилиндром создает вихревой след, что кардинально изменяет поле течения. При числах Маха 3, 4 и малых углах атаки (до 5 градусов) наблюдается новый процесс взаимодействия с пульсирующей ударной волной. При углах атаки превышающих 5 градусов наблюдался известный режим интерференции с конической областью взаимодействия. Течение в этом случае также является нестационарным. Однако, в отличие от малых углов атаки форма области взаимодействия не изменяется. Принципиально иной характер взаимодействия наблюдается при гиперзвуковой скорости набегающего потока (M=6). Во всем исследованном диапазоне углов атаки (до 20 градусов) выявлен осциллирующий режим взаимодействия с глобальной перестройкой всей структуры течения. При этом только при нулевом угле атаки крыла осциллирующая область взаимодействия имеет конечные размеры. Во всех остальных случаях она распространялась вверх против потока вплоть до генератора вихревого следа.

В ИПМ им. М.В.Келдыша РАН выполнено численное моделирование взаимодействия вихревого следа за крылом с головным скачком уплотнения перед цилиндром [6,7]. Моделирование проведено в рамках трехмерных нестационарных уравнений Эйлера, Навье-Стокса и Рейнольдса для углов атаки 2.5, 10 градусов и чисел Маха 3, 4 и 6. Исследовалось влияние различных моделей турбулентной вязкости. Использовались многоблочные сетки. Расчетная область разбивалась на 128 блоков, сетки содержали до 23 млн. узлов. Расчеты проведены на многопроцессорной вычислительной системе RSC-4 с использованием 24 – 44 процессорных элементов. Получен близкий к линейному рост производительности с увеличением числа процессоров.

Выполненный анализ показал хорошее согласование расчетных и экспериментальных данных о структуре течения (распределение полного и поперечного чисел Маха и полного давления) в ядре концевого вихря. В расчете,

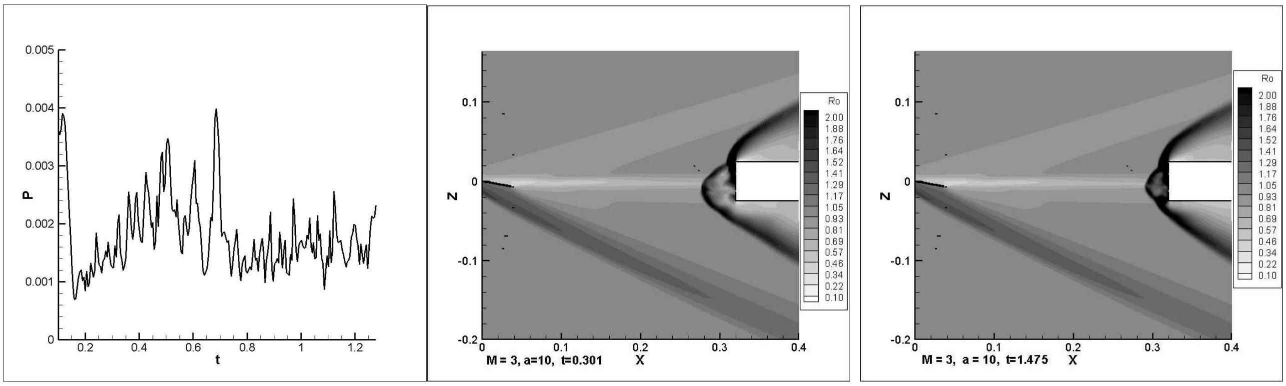


Рис. 1: Зависимость от времени давления на торце цилиндра. Изменение положения головной ударной волны

как и в эксперименте, реализуется нестационарный режим взаимодействия вихря с головной ударной волной перед торцом цилиндра. Об этом свидетельствует, как сравнение полученных картин течения в различные моменты времени, так и зависимости газодинамических величин от времени (рис. 1). В тоже время имеют место определенные различия результатов расчета и эксперимента в особенностях течения и размерах области взаимодействия и распределении давления на торце цилиндра. В первую очередь, это относится к режиму течения с M=6, для которого диаметр ядра вихря существенно меньше, чем для M=3, что предъявляет повышенные требования к качеству расчета.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ: проекты № 06-01-00774, № 08-0800356.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Smart M.K., Kalkhoran I.M., Bentson J.* Measurements of supersonic wing tip vortices // AIAA Journal, Vol 33, No 10, pp 1761-1768, 1995.
2. *Kalkhoran I.M., Smart M.K.* Aspects of shock wave-induced vortex breakdown // Progress in Aerospace Sciences, 2000, vol.30, pp. 63-95.
3. *Rizzetta D.P.* Numerical Investigation of Supersonic Wing-Tip Vortices // AIAA Journal, V 34, No 6, June 1996, pp.1203-1208.
4. *A.M. Shevchenko, I.N. Kavun, A.A. Pavlov, Al.A. Pavlov, A. S. Shmakov, V.I Zapryagaev.* Unsteady effects in wing wake / shock interactions. Proc of 2nd European Conference for Aerospace Sciences, Brussels, 1-6 July, 2007, Paper No. 2.01.03., 8p.
5. *A.M. Shevchenko A.S. Shmakov and V.I. Zapryagaev.* Experimental study of an unsteady flowfield in wing wake / shock interactions. Proc. West-East High Speed Flow Field Conference (WEHSFF2007), Moscow, 19-22 November, 2007, Paper S1-04, 13 p.
6. *A. M. Shevchenko, A. E. Lutsky, A. S. Chernoguzov, K. Yu. Polkova.* Tech-

niques and results for investigations of supersonic wing-tip vortices. Proc of XIII International Conference on the Methods of Aerophysical Research, Novosibirsk, 5-10 February, 2007, Part 3, pp. 215-220.

7. *A.M. Kharitonov, A.E. Lutsky, A.M. Shevchenko.* Investigations of supersonic vortex cores above and behind of a wing. Proc of 2nd European Conference for Aerospace Sciences, Brussels, 1-6 July, 2007, Paper No. 2.01.02., 8 p.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ

Луцкий А.Е.[1], Михалев А.С.[2]

[1]*Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва*

[2]*МГУ им.М.В.Ломоносова, Москва*

При изучении свойств турбулентных течений широко используются осредненные уравнения Рейнольдса. Применение этих уравнений связано с проблемой замыкания. Эта проблема решается, в частности, с помощью различных моделей турбулентной вязкости. К настоящему времени известно большое количество таких моделей. Однако, ощущается определенный недостаток конкретных данных использования этих моделей применительно к характерным течениям.

В настоящей работе влияние турбулентной вязкости исследуется на примере классической задачи об обтекании обратного уступа – Рис.1

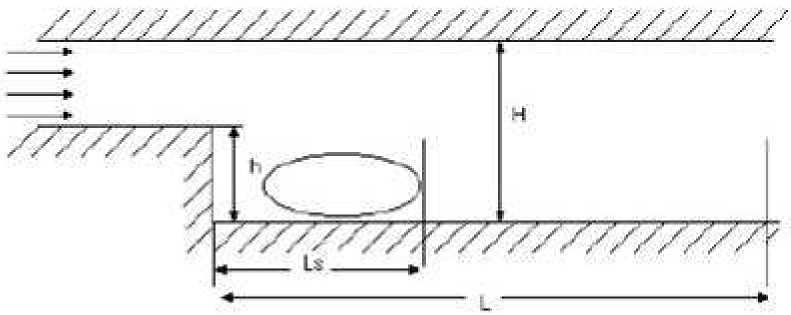


Рис. 1: Схема области течения

Для численного моделирования течения использовалась программа NAST2D, размещённая в свободном доступе в Интернете:
http://people.scs.fsu.edu/ burkardt/cpp_src/nast2d/nast2d.html.

Исходный вариант программы предназначен для расчета ламинарных течений в рамках модели уравнений Навье-Стокса. Программа была доработана путем включения моделей турбулентной вязкости Болдуина-Ломакса [4], Смагоринского [4] и их сочетания (простейший вариант DES [3,5]). Все рассмотренные модели относится к алгебраическим типам [1,2]. Достоинством таких моделей являются вычислительная эффективность, простота калибровки и модификация с учётом специфики рассматриваемых течений. Известна и определенная ограниченность таких моделей.

Наиболее интересные результаты были получены для варианта Re=800, который относится к переходным режимам [6].

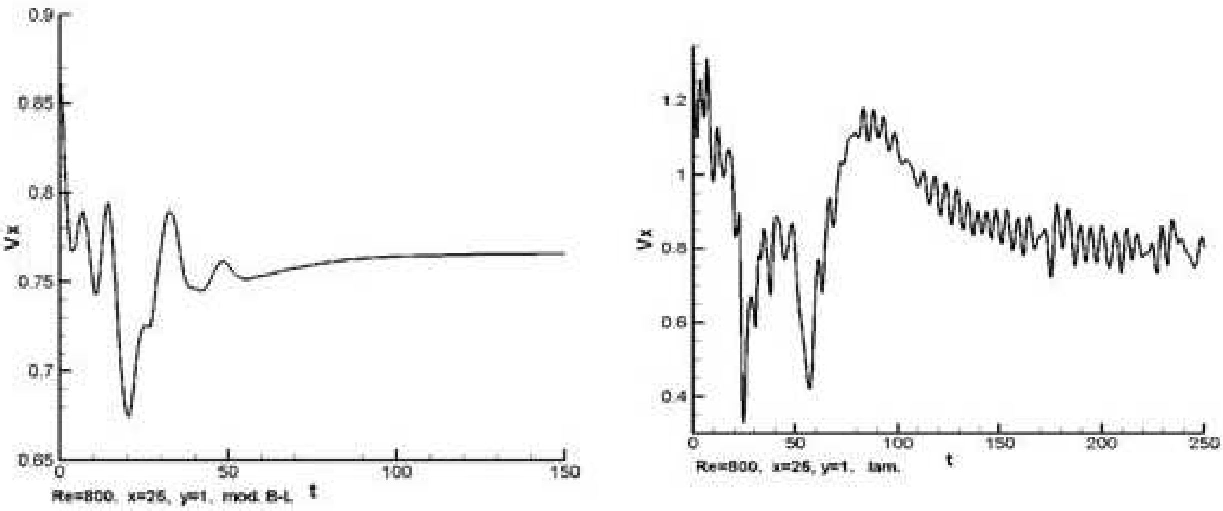


Рис. 2: Зависимость от времени продольной составляющей скорости в центре области. Уравнения Навье-Стокса – справа, уравнения Рейнольдса с моделью Болдуина-Ломакса – слева.

Решение уравнений Навье-Стокса оказывается нестационарным. Зависимость скорости от времени характеризуется незатухающими колебаниями. При использовании уравнений Рейнольдса получается стационарный режим. Это стационарное решение демонстрирует хорошее согласие с данными работы [7] по размерам области возвратного течения за уступом и распределению скоростей поперек канала.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ: проект № 08-08-00356.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ю. В. Лапин.* Статистическая теория турбулентности. Научно технические ведомости 2‘ 2004. Проблемы турбулентности и вычислительная гидродинамика (к 70-летию кафедры “Гидроаэродинамика”).
2. *Ю. В. Лапин, А. В. Гарбарук, М. Х. Стрелец.* Алгебраические модели турбулентности для пристеночных канонических течений. Научно технические ведомости 2‘ 2004. Проблемы турбулентности и вычислительная гидродинамика (к 70-летию кафедры “Гидроаэродинамика”).
3. *М. Х. Стрелец, А. К. Травин, М. Л. Шур, Ф.Р. Спаларт.* Метод моделирования отсоединённых вихрей для расчёта отрывных турбулентных

течений. Научно технические ведомости 2' 2004. Проблемы турбулентности и вычислительная гидродинамика (к 70-летию кафедры "Гидроаэродинамика").

4. *И. А. Белов, С. А. Исаев.* Моделирование турбулентных течений. Министерство образования Российской Федерациию Балтийский государственный технический университет «Военмех». Санкт-Петербург 2001.
5. *F. E. Camelli, R. Lohner.* Combining the Baldwin Lomax and Smagorinsky Turbulence Models to Calculate Flows with Separation Regions. AIAA-2002-0426.
6. *B.F. Armaly. F. Durst. J.C.F. Pereira. B. Schonung.* Experimental and theoretical investigation of backward-facing step flow. J. Fluid Mech. (1983), vol. 127, pp. 473-496.
7. Large-eddy simulation of a backward facing step flow using a least-squares spectral element method. By Daniel C. Chan and Rajat Mittal. Center of Turbulence Research. Proceedings of the Summer Program 1996.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОГО ГАЗА С ОТРЫВОМ ПОТОКА

Максимов Ф.А.

Институт автоматизации проектирования РАН, Москва

В докладе приведены разработанный метод решения задач внешнего обтекания с учетом отрыва потока, способы построения расчетных сеток около тел пространственной конфигурации, результаты моделирования.

Течение моделируется на основе уравнений Навье-Стокса в приближении тонкого слоя. Приближение тонкого слоя содержит в рамках единых уравнений все члены уравнений Эйлера и пограничного слоя. С одной стороны, данное приближение отвечает возможностям современной вычислительной техники. В настоящее время при рассмотрении трехмерных задач, фактически, возможно использование сеток со сгущением узлов только в одном координатном направлении – по нормали к поверхности тела. С другой стороны, учет невязких и основных вязких эффектов в рамках единой системы позволяет построить картину течения с учетом вязко-невязкого взаимодействия.

Для моделирования течений около различных геометрий разработаны способы построения сетки. Общей особенностью реализованных подходов к построению сеток является выделение координатного направления ориентированного по нормали к поверхности тела, и сгущение узлов к поверхности тела. Используется экспоненциальное сгущение, что позволяет получить профиль газодинамических функций в пограничном слое около обтекаемой поверхности.

Для получения решения методом установления используется явная двухшаговая разностная схема. Особенностью является применение локального шага интегрирования, обеспечивающего распространение возмущений со скоростью один узел за шаг итерации при числе Куранта единица. И хотя при реальном интегрировании возможное, с устойчивым итерационным процессом, число Куранта меньше единицы, данный подход позволяет получать установление за достаточно малое количество итераций и приемлемое время.

В докладе приведены примеры расчетов моделирования течений около осесимметричных тел с острой и затупленной головной частью, донным срезом, крыльев конечного размера малой и большой стреловидности, комбинации осесимметричного тела с крестообразным крылом. Разработанные методы позволяют решать вопросы аэродинамического проектирования в условиях до-, транс- и сверхзвуковых скоростях и углах атаки до 30^o. В докладе приведено сопоставление расчетов с экспериментальными результатами.

ИССЛЕДОВАНИЕ ХИМИКО-КОНДЕНСАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ НА ОСНОВЕ МИКРО И МАКРО АНАЛИЗА

Марков А.А., Филимонов И.А.

Институт проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, Москва,
Институт структурной макрокинетики РАН, Черноголовка,

Исследование химико-конденсационных процессов (ХКП) представляет большой практический и научный интерес в связи с проблемами оптимизации сжигания газовых смесей, получения ультрадисперсных порошков различных соединений, утилизации тепла химических превращений и др. Рассматривается идеально перемешанная в начальный момент смесь газов и зародышей конденсированной фазы в полубесконечной цилиндрической трубе. Путем описания задачи на макро- и микроскопическом уровнях установлена связь макроскопических параметров в реагирующей смеси с детальной кинетикой протекающих микропроцессов [1,2]. Для схемы физико-химических превращений с одной конденсирующейся фазой получен аналитический критерий направления фазового превращения в реакционно-способной смеси. Установлена возможность релаксационных колебательных режимов роста (испарения) частиц и найдены условия получения как гомогенных, так и градиентных (по составу) конденсированных продуктов реакций для схемы с двумя конденсирующимися компонентами. Проведено численное моделирование на основе самосогласованного расчета микро и макро масштабов. Представленные исследования показывают возможность анализировать зависимость динамики роста и испарения частиц от кинетики, состава дисперсной смеси и начальной температуры в процессах химических и фазовых превращений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марков А.А.* Модель микро и макро масштабов химической конденсации при течении смеси газа с твердыми частицами в канале с нагретой стенкой // ТОХТ 2007. Т. 41. N. 4. С. 333–342.
2. *Grigoryev Yu.M., Markov A.A. and Filimonov I.A.* Modelling of the condensed burning in a tube // Proc. Symp. Saint-Venant Multiple scale analysis and coupled physical systems. Paris: Pont et Chaussees Pres. 1997. P. 221 – 228.

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УПРУГОВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ВРЕМЕНЕМ РЕЛАКСАЦИИ

Никитин И.С.

Институт проблем механики РАН, Москва

Реализация явных схем интегрирования уравнений динамики упруговязкопластической среды сопряжена с известными вычислительными трудностями из-за наличия малого параметра времени релаксации (или параметра динамической вязкости) в знаменателе вязких членов. Малость времени релаксации по сравнению с обычным курантовским шагом по времени делает уравнения жесткими и приводит к неприемлемым дополнительным ограничениям расчетного шага по времени.

Для того чтобы преодолеть это затруднение, предложен новый явно-неявный метод аппроксимации системы уравнений. Определяющие полулинейные уравнения системы, содержащие малый параметр в знаменателе нелинейного свободного члена, аппроксимируются неявно и решаются относительно неизвестных компонент напряжений на верхнем слое по времени аналитически. Полученные новые формулы являются корректировочными по отношению к упругому расчетному шагу и допускают предельный переход к нулевой вязкости, что соответствует решению упругопластической системы уравнений. Метод реализован в двух вариантах аппроксимации: первого и второго порядка точности по времени. Получены корректировочные формулы для классической изотропной упруговязкопластической модели и для анизотропных континуальных моделей, описывающих динамику слоистых и блочных сред с проскальзыванием на контактных границах.

Приведены примеры решения динамических задач о взаимодействии волн с полостями и сооружениями в неупругих средах такого типа, контактных задач о соударении и сварке протяженных пластин и трубчатых образцов из металлов, чувствительных к скорости деформации за пределом упругости.

О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ ТЕПЛОВОЙ КОНВЕКЦИИ В СФЕРИЧЕСКОМ СЛОЕ

Решетняк М.Ю.

Институт Физики Земли им.О.Ю.Шмидта РАН, Москва

Во многих задачах астро- и геофизики возникает задача моделирования тепловой конвекции в сферическом слое. В работе рассматривается такая задача в приближение Буссинеска с подогревом снизу, внутренними тепловыми источниками, а также с различными граничными условиями для поля скорости. Модель основана на методе контрольного объема, адаптированного средствами MPI для вычислений на многопроцессорной технике на сетках 125^3. Оказывается, что в силу нелинейности задачи топология восходящих и нисходящих течений у каждой из границ может существенно отличаться. Нами рассмотрен вопрос, как подобная асимметрия течений зависит от числа Прандтля. Подобные вопросы уже давно возникали при моделировании процессов в мантии Земли (бесконечные Прандтли), были известны в достаточно сложных моделях солнечной конвекции (но при этом считалось, что за эффект ответственна сжимаемость жидкости), а также учитывались в моделях геодинамо. Наиболее ярко эффект выражен при больших числах Прандтлях. Так, на нижней границе слоя наблюдаются сотовые структуры из восходящих потоков, и плюмы из нисходящих (холодных) течений. На верхней границе наблюдается обратная структура: соты из холодных течений (супергранулы на Солнце) и горячие плюмы. Мы приводим количественные характеристики данного эффекта и даем качественное наглядное описание происхождения этого явления.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ДЛЯ ДВУХФАЗНЫХ СЖИМАЕМЫХ ТЕЧЕНИЙ

Роменский Е.И.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Математическое моделирование многофазных сред представляет интерес для многих научных и прикладных задач. Тем не менее, до сих пор отсутствует общепринятая теория, приводящая к более или менее законченной формулировке определяющих уравнений. Основная трудность заключается в том, чтобы уравнения движения обладали такими свойствами как гиперболичность (симметрическая гиперболическая система), все уравнения имели дивергентную форму и согласовывались с законами неравновесной термодинамики. Перечисленные свойства привлекательны с математической и вычислительной точки зрения и позволяют применять известные математические и численные методы для решения различных задач.

Мы предлагаем иерархию систем определяющих уравнений двухфазных сжимаемых течений, вывод которых основан на формализме термодинамически согласованных систем законов сохранения [1]. Этот подход позволяет формулировать гиперболические системы законов сохранения с использованием порождающих переменных и потенциалов. Для случая многофазных течений смесь представляется как сплошная среда, в которой параметры состояния характеризуют ее многофазность. Самая общая гиперболическая система законов сохранения двухфазных сред описывает течение с различными давлениями и температурами фаз [2]. Сформулированы также более простые модели течения с одинаковой температурой фаз и изэнтропическая модель.

Для решения предложенных уравнений предложены численные методы и решен ряд тестовых одно- и двумерных задач, включая задачу о взаимодействии ударной волны с пузырьком газа. Полученные результаты дают хорошее соответствие с имеющимися аналитическими решениями и экспериментальными данными.

Работа выполнена при финансовой поддержке европейской программы Marie Curie, Incoming International Fellowship, Contract MIF1-CT-2005-021368.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Годунов С.К., Роменский Е.И.* Элементы механики сплошных сред и законы сохранения, Новосибирск.: Научная книга, 1998. 268 с.
2. *Romenski E., Resnyansky A.D., Toro E.F.* Conservative hyperbolic formulation for compressible two-phase flow with different phase pressures and temperatures // Quarterly of Applied Mathematics. 2007. Vol. 65. p. 259–279.

СУЩЕСТВО МЕТОДА РАЗНОСТНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ И ЕГО ВОЗМОЖНОСТЕЙ, А ТАКЖЕ ОБЗОР НЕКОТОРЫХ ИЗ УЖЕ РЕАЛИЗОВАННЫХ ПРИЛОЖЕНИЙ

Рябенький В.С.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

Разностный потенциал представляет собой конструктивный перенос классического интеграла типа Коши из теории аналитических функций, т.е. из теории системы Коши-Римана, на случай произвольных систем линейных разностных уравнений.

Поэтому метод разностных потенциалов объединяет возможности классического интеграла типа Коши с универсальностью разностных схем.

Доклад знакомит с теорией метода и содержит обзор некоторых реализованных к настоящему времени приложений для численного решения краевых задач, а также для создания дискретных моделей активного управления звуком в составных областях.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 08-01-00099

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *В.С. Рябенький.* Метод разностных потенциалов и его приложения. // Физматлит, Москва. 2002. с. 1–496

ОБ ЭНТРОПИИ В ЧИСЛЕННЫХ СХЕМАХ ГАЗОДИНАМИКИ НА ОСНОВЕ СООТНОШЕНИЙ НА РАЗРЫВАХ

Сафронов А.В.

ФГУП Центральный научно-исследовательский институт машиностроения, Королев

Анализируется поведение энтропии в численных схемах типа Годунова на основе аппроксимации потоков на границе ячейки сетки с помощью приближенного решения задачи Римана о распаде разрыва.

Энтропийное обоснование приближенных Риман-солверов базируется на следующих классических положениях: 1)необходимо выполнение условия Олейник, полученного на основе концепции «исчезающей вязкости» Олейник(1957), Lax (1973), которое позволяет выделить единственное обобщенное решение выпуклых гиперболических уравнений; 2) метод Годунова (1959) удовлетворяет условию Олейник и имеет минимальную схемную вязкость; 3) в разностной схеме выполняется условие Олейник, если численная вязкость превышает численную вязкость схемы Годунова, E-flux схемы Osher(1984).

В качестве примера, сеточно-характеристические схемы типа Roe (1981) не имеют достаточной диссипации в случае смены знака характеристик, что и приводит к появлению нефизических скачков разрежения. Поэтому для схем типа Roe применяются процедуры энтропийной коррекции на основе добавок к модулям собственных значений матрицы потока типа Harten, Hyman (1983), или, например, на основе свойств выпуклости функции потока [1].

Энтропийно обоснованы схемы LxF (Lax-Friedrichs , 1960), Русанова (1961), HLL (Harten, Lax, Van Leer, 1981), EO (Engquist – Osher,1981). Причем схема LxF имеет максимальную схемную вязкость.

В приведенных известных положениях неубывание энтропии отслеживается при вычислении параметров в ячейках разностной сетки по отношению к параметрам на предыдущем шаге счета по времени. Иной подход изложен в недавней работе [2], где предложен контроль неубывания энтропии при аппроксимации потоков на границах ячеек сетки по отношению к параметрам в соседних ячейках сетки. При этом возникает проблема вычисления энтропии по параметрам потока на границе ячеек, кроме этого, данное требование является более жестким, чем принятое - из перечисленных схем, кроме метода Годунова, его выдерживает лишь схема EO. Очевидно также, что энтропийное условие работы [2] не выполняется при интерполяции параметров к границам ячейки сетки в схемах второго порядка. Между тем на основе общепринятых положений разработаны эффективные схемы повышенного порядка, например Harten (1983). Таким образом, подход [2] не дает практических результатов.

Из энтропийно обоснованных схем, наиболее распространенным является метод HLL, в двухволновом приближении с учетом разрывов типа левой и правой ударных волн и максимальной оценкой скоростей движения этих волн, по наклонам характеристик в соседних ячейках разностной сетки. Однако недостатком схемы HLL является «размазывание» контактного разрыва.

В настоящей работе рассматриваются схемы HLLC-типа (Toro at al., 1994), в которых учитывается контактный разрыв с выбором скоростей левой и правой волн аналогично HLL [3, 4], при этом расчет изоэнтропических течений в зонах разрежения проводится по двухволновой схеме HLL, поэтому не возникает проблем убывания энтропии. Этот факт подтверждается на ряде характерных численных примеров.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Сафронов А.В.* Способ стабилизации сеточно-характеристических схем для уравнений газодинамики// Вычислительные методы и программирование. 2007,8, №1, 6-9
2. *Прокопов Г.П.* Необходимость контроля энтропии в газодинамических расчетах // ЖВМ и МФ.2007.47,№9,1591-1601
3. *Сафронов А.В.* Разностная схема для нестационарных уравнений газодинамики из соотношений на разрывах в консервативных переменных//Вычислительные методы и программирование. 2007,8, №1, 69-76.
4. *Сафронов А.В.* Разностный метод для уравнений газодинамики из соотношений на разрывах// Математическое моделирование. Том 20, №2, 2008, с 76-84.

СХЕМЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Страховская Л.Г.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

Построены схемы высокого порядка точности для расчета течений вязкой несжимаемой жидкости. Схемы конструировались на треугольной неструктурированной сетке с помощью Метода конечных суперэлементов (МКСЭ), предложенного в [1]. Основным элементом этого проекционно-сеточного метода является построение базисных функций как решения исходного уравнения в расчетной ячейке со специальными краевыми условиями. В [1] в качестве краевых условий использовались линейные и квадратичные базисные функции. В [2], [3] использовались векторные полиномиальные функции, заданной степени, образующие интерполяционный базис на границе ячейки. В данной работе предлагается строить краевые условия для суперэлемента в виде векторных полиномиальных функций, удовлетворяющих уравнению неразрывности и образующих «формальный базис» на границе СЭ. На тестовой задаче «о течении в каверне с движущейся верхней стенкой» проведено сравнение трех типов схем: МКЭ, МКСЭ [3] и предлагаемая в данной работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 08-01-00299

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Л.Г. Страховская, Р.П. Федоренко.* Об одном варианте метода конечных элементов. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 1979. Т. 19. № 4. С. 950–960.
2. *Л.Г. Страховская.* Об одном варианте МКСЭ для уравнений Навье-Стокса. Препринт № 90 ИПМатем. РАН, 2006, 24 стр.
3. *Л.Г. Страховская.* Об одном варианте МКСЭ для расчета течений вязкой несжимаемой жидкости. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2008. Т. 48. № 12 (в печати).

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧ ФИЛЬТРАЦИИ В ТРЕЩИНОВАТЫХ СРЕДАХ

Пергамент А.Х., Томин П.Ю.

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша, Москва

Математическое моделирование процессов фильтрации жидкостей и газов в пористых средах всегда представляло большой интерес. С точки зрения подземной гидродинамики это связано, прежде всего, со сложностью проведения эксперимента, повторяющего реальные физические условия. В настоящее время особый интерес представляет исследование фильтрации в средах с наличием трещин, т. е. зон небольшого относительного объема, но при этом обладающих высокой проводимостью. Это связано с тем, что в связи с высоким спросом на углеводородное сырье в процесс разработки включаются месторождения с низкой пористостью и проницаемостью, а так же карбонатные коллекторы, склонные к образованию трещин. В первом случае образование трещин идет вследствие так называемого гидроразрыва пласта, который является одним из основных методов повышения нефтеотдачи. Во втором случае трещины могут образовываться естественным образом в процессе разработки месторождения. Кроме того, исследование фильтрационных процессов в средах с нарушениями имеет и общенаучное значение: задачи многокомпонентной фильтрации такого рода возникают, например, при моделировании процессов в ядерных реакторах.

В работе исследуются различные подходы к моделированию фильтрационных процессов в средах с наличием трещин [1, 2]. Проведен анализ основных методик расчета, как с физической, так и с вычислительной точки зрения. Основной особенностью таких задач является наличие разных характерных масштабов по времени и пространству для процесса изменения давления и процесса переноса флюидов. Для учета данного момента разработан многомасштабных метод, являющийся развитием метода конечных суперэлементов Р. П. Федоренко [3]. Предложена эффективная комбинация этого метода с методом опорных операторов [4], позволяющая правильно передать особенности точного решения. Проведен анализ построенных разностных схем и численное моделирование.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 06-01-00836).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Г. И. Баренблатт, Ю. П. Желтов, И. Н. Кочина* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика. 1960. Т. XXIV, N. 1, сс. 1–10.
2. *Н. М. Дмитриев, В. М. Максимов* Модели фильтрации флюидов в анизотропных трещиновато-пористых средах // Доклады Академии наук. 2007. Т. 416, N 3, сс. 338–340.
3. *Р. П. Федоренко* Введение в вычислительную физику. М.: Наука, 1994. СС. 501–516.
4. *А. Х. Пергамент, В. А. Семилетов* Метод опорных операторов для эллиптических и параболических краевых задач с разрывными коэффициентами в анизотропных средах // Математическое моделирование. 2007. Т. 19, N 5, сс. 105–116.

РАЗРАБОТКА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИМПУЛЬСНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Фонарев А.В.

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь

В качестве численной схемы расчета нами использована модификация явной конечно-разностной схемы М. Уилкинса, применительно к регулярным и нерегулярным треугольным сеткам [1]. Поскольку используется подвижная сетка, то возникла необходимость разработки алгоритмов локальной автоматической перестройки [1, 2]. Однако потребности практики привели к необходимости перехода на многопроцессорные машины и модернизации созданных алгоритмов.

Нами при распараллеливании используется подход геометрической декомпозиции, при котором расчетная область разбивается на подобласти [2]. Стыковка происходит по границам подобластей, для чего вводятся дополнительные индексные векторы соответствия нумерации. Для генерации плоской сетки мы используем собственные генераторы [2], также, возможно использование системы ANSYS. Разностная схема была модернизирована путем введения узловых масс и усилий для каждого узла сетки. Это позволяет выполнить векторизацию расчета уравнений движения независимо по подобластям, выполняемую на своих процессорах. Величины, отнесенные к узлам, расположенным на границах подобластей, хранятся в единой области данных.

Созданные программные комплексы позволяют моделировать процессы соударения, проникания и воздействия продуктов взрыва на элементы конструкций. Другим важным направлением является исследование процессов распространения волн напряжений в грунтовых средах и горных породах, а также задачи динамической забивки свай. В настоящий момент проходит тестирование созданных программ на параллельном кластере кафедры МСС и ВТ Пермского госуниверситета и на МВС-1000 Института механики сплошных сред УрО РАН.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, гранты РФФИ N 07-01-96029, РФФИ N 07-01-97621, РФФИ N 07-08-97626, РФФИ N 07-08-97628.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аптуков В.Н., Мурзакаев Р.Т., Фонарев А.В.* Прикладная теория проникания. М.: Наука. 1992. – 104 с.
2. *Аптуков В.К, Ландик Л. В., Фонарев А.В.* Метод конечных элементов и нерегулярные сетки для решения стационарных задач переноса тепла и

статики упругих тел. Учебное пособие. – Изд. Пермского университета, 2002, 120 с.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

Хизбуллина С.Ф.

Институт механики Уфимского научного центра РАН, Уфа

Задачи динамики жидкости и газа для пространственных областей со сложной геометрией требуют для своего решения значительных вычислительных ресурсов. Этим объясняется повышенный интерес к использованию для решения таких задач многопроцессорных вычислительных систем. В представленной работе рассматривается возможность распараллеливания алгоритма решения уравнений Навье-Стокса, основанного на полу-неявной по давлению конечно-разностной аппроксимации [1].

В основу распараллеливания алгоритма положена идея геометрического параллелизма, которая заключается в декомпозиции исходной геометрической области на ряд подобластей, количество которых определяется числом процессоров используемой для расчета вычислительной системы [2]. При этом преимуществом выбранного алгоритма является то, что он допускает реализацию в виде ряда подпрограмм, которые могут выполняться также над подобластями.

Изначально простая декомпозиция, отвечающая требованию минимального объема пересылок, предусматривает разбиение расчетной области только в направлении одной из координатных осей. Однако, если каждый процессор на любом шаге по времени обсчитывает свою подобласть целиком, полуявность алгоритма приводит к чередующейся работе процессоров, то есть на каждом временном шаге половина процессоров будет простаивать. Улучшить загрузку процессоров позволяет такая организация вычислительного процесса, когда подобласть рассчитывается не целиком, а по частям, с промежуточной пересылкой данных. Для непрерывной работы всех процессоров количество частей, на которые разбивается подобласть, должно быть не менее трех. В этом случае простоя процессоров не будет при условии, что время расчета одной части подобласти должно быть не меньше суммарного времени всех пересылок данных. Последнее условие предполагает, что в любой момент времени может производиться только одна пересылка.

При выполнении требования, связывающего время расчета и время пересылок, все обмены данными между процессорами оказываются разнесенными во времени и не будут пересекаться. Также надо учесть, что необходимость сохранения больших объемов промежуточных результатов расчета (на различных, но не на всех временных шагах) требует выделения одного процессора для сбора данных со всех процессоров и сохранения их на диске. Такая процедура позволяет освободить остальные (считающие) процессоры от выполнения операции обмена данными с диском и тем самым улучшить равномерность их загрузки вычислительной работой.

Показано, что алгоритмы, базирующиеся на полу-явных численных схемах, которые объединяют некоторые достоинства как явных, так и неявных схем, могут быть эффективно распараллелены для использования на кластерных вычислительных систем. Получено соотношение, позволяющее оценить минимальные необходимые для эффективного вычислительного процесса размеры расчетной области. Полученные результаты расчета характеризуют представленный параллельный алгоритм как высокоэффективный и применимый для распараллеливания широкого класса известных последовательных алгоритмов решения гидродинамических задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Griebel M., Dornseifer T., Neunhoeffer T.* Numerical Simulation in Fluid Dynamics. SIAM, 1998. 217 с.
2. *Михайленко К.И., Хизбуллина С.Ф.* Об одном эффективном конвейерном параллельном алгоритме для решения задач механики сплошной среды // Труды Института механики Уфимского научного центра РАН. Вып. 4 / Под ред. С. Ф. Урманчеева, С.В. Хабирова. Уфа: Гилем, 2006, С. 90–102.

ПРИМЕНЕНИЕ ДВУХСЛОЙНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ К РАСЧЕТУ ТЕЧЕНИЙ В КЕРЧЕНСКОМ ПРОЛИВЕ

Чикин А.Л.

Южный научный ценр РАН, Ростов-на-Дону

В судоходной части Керченского пролива глубины составляют 8 - 10 м, а в южной его части до 19 м. В то же время в прибрежных районах, Таманском и Динском заливах глубина составляет 0,5 - 4 м. Такое распределение глубин позволяет говорить о большой их неоднородности. В связи с этим для численного исследования течений в Керченском проливе использовалась двухслойная модель гидродинамики [1].

Особенностью моделирования гидродинамики Керченского пролива является наличие косы Тузла. В 1925 году во время сильного южного шторма в море прорвало косу вблизи Таманского берега и она превратилась в остров, отделенный от мыса Тузла проливом, достигшим через некоторое время ширины нескольких километров. В 2003 г. со стороны Таманского полуострова на месте прежней косы была частично насыпана дамба. Калибровка модели проводилось без учета современной береговой линии, по натурным данным, полученным до 2003 года.

Характерной ситуацией в Керченском проливе является смена течений с Азовоморского на Черноморское или наоборот. С помощью построенной математической модели было численно исследована возможная динамика изменения течения с Азовоморского на Черноморское.

Трехмерность модели позволяет рассчитать скорости течения по вертикальной оси от поверхности до дна в центре Павловской узкости. Численно исследовано изменение эпюры скоростей при смене течений с Азовоморского на Черноморское. Установлено, что полное переформирование течения происходит за 10–11 часов. В первые четыре часа происходит ослабление северного течения, затем начинает набирать силу южное течение.

С помощью построенной математической модели была численно исследована возможная картина течений в центральной части пролива при отсутствии или наличии дамбы в случае действия юго-западного ветра. При отсутствии дамбы основная масса воды через восточный створ нагоняется в Таманский залив. Часть воды движется вдоль северной стороны острова Тузла на север. При наличии дамбы в Таманский залив вода поступает, в основном, с северной стороны о. Тузла, но двигаясь уже в южном направлении.

Проведено численное исследование влияния дамбы на расход воды в поперечных сечениях пролива при действии юго-западного ветра. Установлено, что в северной узости дамба не оказывает никакого влияния. Наличие дамбы сократило расход через восточный створ у о. Тузла и увеличило расход через Павловскую узость.

Сравнение результатов расчета с натурными данными показало удовлетворительное сопадение (20–50%)

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ. Грант 06-01-00038а

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Чикин А.Л.* Об одном из методов расчета параметров течений в водоемах с большой неоднородностью глубин // Водные ресурсы, 2005, т. 32. № 1, с. 55-60.

РАВНОВЕСНАЯ ПЛАЗМЕННАЯ КОНФИГУРАЦИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ПРОВОДНИКА С ТОКОМ

Чмыхова Н.А.

Московский инженерно-физический институт (государственный университет), Москва

Построена МГД - модель плотной, горячей плазменной конфигурации кольцевого сечения в окрестности прямолинейного проводника. В расчетах исследован процесс формирования с помощью возрастания тока в проводнике квазистационарных плазменных конфигураций.

Работа относится к области математического моделирования плазменных конфигураций в магнитном поле ловушек нового типа - "Галатей", предложенных А.И. Морозовым [1-2]. Основное отличие "Галатей"в том, что проводники с током порождающие магнитное поле, расположены внутри плазменного объема. Проводники должны быть изолированы от плазмы. В связи с этим в работе построена математическая модель плазменной конфигурации окружающая проводник, которую следует рассматривать как типичный элемент любой ловушки такого типа.

Продолжены исследования [3] формирования квазиравновесной плазменной конфигурации в одномерной постановке МГД- задачи о сжатии плазмы в цилиндрической ловушке с прямолинейным изолированным проводником с током. Искомая конфигурация образуется под действием возрастающего тока в проводнике, за счет задания магнитного поля на границе с ним на короткой начальной стадии. Аналогичный механизм рассмотрен в работе Г.И. Дудниковой и др. [4] в расчётах двумерной плоской модели ловушки "Пояс".

В серии расчетов показано, что, под действием созданного продольного тока отрицательного направления вблизи проводника, удалось получить конфигурацию кольцевого сечения, оторванную от стенок ловушки и проводника, окруженную вакуумом, который моделируется заданием малой плотности плазмы. Конфигурация существует, за счет высокой проводимости плазмы, на квазиравновесной стадии установления в течении конечного времени, превосходящего время формирования конфигурации.

Численное решение МГД - задачи, проведено методом коррекции потоков (FCT) [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 06-01-00312

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Морозов А.И., Савельев В.В.* О Галатеях -ловушках с погруженными в плазму проводниками. // Усп. физ. наук. 1998. Т. 168. N. 11. С. 1153–1194.
2. *Брушлинский К.В., Савельев В.В.* Магнитные ловушки для удержания плазмы. // Матем. моделирование. 1999. Т. 11. N. 5. С. 3–36.
3. *Брушлинский К.В., Чмыхова Н.А.* Численная модель формирования квазиравновесной плазменной конфигурации вокруг проводника с током. // Научная сессия МИФИ - 2008: Сб. науч. тр. Москва: МИФИ, 2008. Т. 9. С. 64–65.
4. *Дудникова Г.И. и др.* Численное моделирование прямых плазменных конфигураций - Галатей типа "Пояс". // Физика плазмы. 1997. Т. 23. N. 5.

С. 387–396.

5. *Оран Э., Борис Дж.* Численное моделирование реагирующих потоков. // Москва: Мир, 1990.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Якушев В.Л.

Институт автоматизации проектирования РАН, Москва

Рассматриваются три подхода к решению задач нелинейного деформирования и устойчивости тонких оболочек: на основе динамических или статических уравнений, или на основе метода дополнительной вязкости. Анализируются преимущества и недостатки этих подходов с вычислительной и механической точек зрения.

Уравнения динамики были впервые использованы в работе Феодосьева В.И. [1]. Вязкость использовалась для обеспечения затухания при установлении решения. Решение однозначно зависит от времени, критерием устойчивости является наличие переходного процесса. В дальнейшем это направление практически не развивалось, хотя получаемые результаты должны быть наиболее близки к реальной картине потери устойчивости, поскольку при переходном процессе от устойчивого докритического к устойчивому закритическому состоянию силы инерции и вязкости играют заметную роль.

По числу работ самой преобладающим является подход, основанный на статических уравнениях. Обоснованием их использования является предположение, что их решение проще, чем решение динамических уравнений. Статические нелинейные задачи обычно решаются либо методом продолжения по параметру, либо итерационными методами. В обоих случаях из-за многозначности решения возникает проблема выбора параметров, в зависимости от которых находятся искомые функции, так как приходится отслеживать всю кривую деформирования и выбирать путь продолжения решения в точках его ветвления [2].

При использовании вязких уравнений (без динамической составляющей) существуют два подхода. При первом вязкость рассматривается как реальное свойство материала. Но в общем случае, наличие вязкости при пренебрежении силами инерции не может обеспечить непрерывность решения при переходном процессе. При втором - вязкость рассматривается не как реальное свойство материала, а как дополнение к статическим уравнениям для обеспечения непрерывности решения при переходном процессе [3], [4], [5]. В этом случае на вязкость накладываются определенные ограничения. Она может вводится либо в реологические уравнения, либо в виде дополнительных внешних сил пропорциональных скоростям перемещения точек срединной поверхности оболочки. При ее добавлении в реологические уравнения характеристики решения совпадают с направлениями пространственных осей и времени, поэтому на каждом временном слое приходится решать линейную эллиптическую задачу удобную для применения метода конечных разностей и метода конечных элементов. И она в ряде случаев существенно проще, чем рассмотрение параболических или гиперболических уравнений динамики или статики оболочек.

На основе динамических и вязких уравнений рассмотрена устойчивость пологих сферических куполов с учетом начальных несовершенств. Решение ищется путем разложения прогиба и напряжения в ряды по собственным функциям свободных колебаний купола. Введена специальная функция, позволяющая упростить разложение функции напряжения и, как результат, итерационную схему решения нелинейных уравнений. Рассмотрена устойчивость куполов с учетом начальных неправильностей, полученных в результате обмеров формы куполов, выполненных С. Ямада, К. Учияма и М. Ямада [6] и любезно предоставленных автору профессором С. Ямада. Получено хорошее совпадение для верхних критических нагрузок и формы оболочки для предкритического состояния. С целью сокращения времени расчета и увеличения точности усовершенствована конечноразностная схема для решения по времени жесткой системы нелинейных уравнений [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 07-01-00733.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Феодосъев В.И* Об одном способе решения нелинейных задач устойчивости деформируемых систем // ПММ. 1963. Т. 27. Вып. 2. С. 265–274.
2. *Григолюк Э.И., Лопаницын Е.А* Конечные прогибы, устойчивость и закритическое поведение тонких пологих оболочек. М.: МГТУ "МА- МИ", 2004.
3. *Якушев В.Л.* Нелинейные деформации и устойчивость тонких оболочек. М.: Наука, 2004. 276 с.
4. *Якушев В.Л.* О решении нелинейных уравнений деформирования и устойчивости оболочек // Всероссийская конференция "Современные проблемы механики сплошной среды"(МИАН, Москва, 12-14 ноября 2007 г.) посвященная памяти академика Леонида Ивановича Седова в связи со столетием со дня его рождения. 8 с.
5. *Якушев В.Л.* . О влиянии начальных отклонений в геометрической форме на устойчивость тонких оболочек // Международная конференция "Обратные и некорректные задачи математической физики", посвящен-

ная 75-летию академика М.М.Лаврентьева, 20-25 августа 2007 г., Новосибирск, Россия. Сборник докладов, 4 с.

6. *Yamada S., Uchiyama K., Yamada M.* Experimental investigation of the buckling of shallow spherical shells // Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 18, No. 1, pp. 37-54, 1983.

Содержание