Институт прикладной математики
им. М.В.Келдыша РАН (Москва)

Южно-Российский региональный центр
информатизации ЮФУ (Ростов-на-Дону)

Московский государственный университет
им. М.В.Ломоносова (Москва)

XVIII ВСЕРОССИЙСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ "ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ И КОНСТРУИРОВАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ АЛГОРИТМОВ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ",

посвященная памяти К.И. Бабенко

ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

Дюрсо, 2010

Оргкомитет XVIII Конференции выражает признательность Российскому фонду фундаментальных исследований, при поддержке которого состоялось это мероприятие (грант 10-01-06065г и грант 10-01-06816-моб-г)

УДК 51, 53

ББК 22.19

Тезисы докладов XVIII Всероссийской конференции "Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов решения задач математической физики", посвященной памяти К.И. Бабенко (Дюрсо, 13-17 сентября, 2010).- М: Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша, 2010. - 80с.

ISBN 978-5-98354-006-4

АННОТАЦИЯ

Конференция включает лекции и доклады по вычислительной математике, аэро-гидродинамике, молекулярной биологии. Обсуждаются направления развития алгоритмов математической физики и параллельных вычислительных технологий. Также рассматриваются теоретические вопросы дифференциальных уравнений, точные и асимптотические представления решений краевых задач и динамических систем.

Proceedings of the XVIII All-Russian Conference "Theoretical bases and generation of numerical algorithms of solving mathematical physics problems", devoted to K.I.Babenko (Durso, 13-17 September, 2010)

ABSTRACT

The conference includes lectures and reports on computational mathematics, aero-hydrodynamic, molecular biology. The development of mathematical physics algorithms and the parallel computational technologies are discussed. The theoretical problems on differential equations, exact and asymptotic solutions of boundary problems are considered.

ISBN 978-5-98354-006-4

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТОЙЧИВОСТЕЙ И КОНТАКТНЫХ СТРУКТУР НА ОСНОВЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ НА МИНИМАЛЬНОМ ШАБЛОНЕ

Азарова О.А.
Учреждение Российской академии наук Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва

Модифицированные схемы на минимальном шаблоне используются для моделирования стационарных и нестационарных структур потока при взаимодействии термальной неоднородности со сверхзвуковым ударным слоем. Тепловая неоднородность имеет форму протяженного разогретого разреженного канала. Рассматриваются бесконечные и ограниченные каналы, расположенные симметрично и асимметрично относительно обтекаемого затупленного тела (см. [1, 2]). Исследованы вихревые структуры потока, инициированные развитием неустойчивостей внутри передних отрывных областей (рис. 1а и 1б). Получены периодические стационарные структуры потока, располагающиеся в области между поверхностью тела и тангенциальным разрывом, параллельным поверхности тела (рис. 1в). Представлена классификация полученных структур в рамках широкого диапазона определяющих параметров течения.

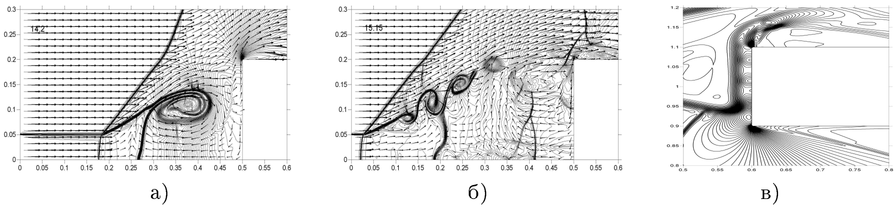


Рис. 1: Примеры структур потока: а) - тороидальный стратифицированный вихрь, инициированный неустойчивостью Рихтмайера-Мешкова; б) - дорожка вихрей, инициированная неустойчивостями Кельвина-Гельмгольца; в) - стационарная структура потока с двумя элементами

Работа выполнена финансовой поддержке EOARD (проект ISTS 3058p)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азарова О.А.* Об одной разностной схеме на минимальном шаблоне для расчета двумерных осесимметричных течений газа. Примеры пульсирующих потоков с неустойчивостями // ЖВМ и МФ. 2009. Т. 49. N. 4. С. 1-20.
2. *Azarova O.A., Knight D., Kolesnichenko Yu. F.* Instabilities, Vortices and Structures Characteristics During Interaction of Microwave Filaments with Body in Supersonic Flow // Paper AIAA-2010-1004. P. 1-16.

h-МАТРИЦА – НОВЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ ДЛЯ ДИСКРЕТИЗАЦИИ МНОГОМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Алгазин С.Д.

Учреждение Российской Академии Наук Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского, Москва

В 1973 году я закончил механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова и был распределён в Институт прикладной математики АН СССР, вначале в 12 отдел, а позднее перевёлся в 4 отдел, которым тогда руководил Константин Иванович Бабенко. Константин Иванович предложил мне заняться новыми алгоритмами (численными алгоритмами без насыщения) для классических задач мате-матической физики. Вначале мы рассмотрели одномерные задачи (задачу Штурма-Лиувилля, уравнение Бесселя и др.), а потом занялись задачей на собственные значения для оператора Лапласа. Анализируя формулы для матрицы дискретной задачи Дирихле, я заметил, что эта матрица имеет следующую блочную структуру:

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1m} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{m1} & h_{m2} & \dots & h_{mm} \end{pmatrix}$$

где $h_{\mu\nu}, \mu, \nu = 1, 2, \dots, m$ - симметричные циркулянты размера $N \times N, N = 2n + 1$, т. е. матрицы, первая строка которых имеет вид:

$$b_0, b_1, \dots, b_n, b_n, \dots, b_1,$$

а остальные строки получаются из первой циклической перестановкой. Для краткости будем называть матрицы такого вида h-матрицами. Здесь m и N - параметры в круге, m - число окружностей сетки, а N=2n+1 - число точек на каждой окружности. За один вечер я доказал теорему о свойствах этой матрицы. Позднее стало ясно, что матрицы такого вида и некоторые их обобщения широко встречаются в задачах математической физики. Их можно использовать при дискретизации так, что дискретизация двухмерной задачи сводится к дискретизации одномерной задачи, а дискретизация трёхмерной задачи сводится к дискретизации двухмерной задачи. Тому, как это сделать практически - посвящён настоящий доклад.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алгазин С.Д.* Численные алгоритмы без насыщения в классических задачах математической физики. Москва: Научный мир, 2002.
2. *Алгазин С.Д., Кийко И.А.* Флаттер пластин и оболочек. Москва: Наука, 2006.

О РАЗРАБОТКЕ И ИСПЫТАНИЯХ СУПЕРКОМПЬЮТЕРОВ С НЕТРАДИЦИОННОЙ АРХИТЕКТУРОЙ В ИПМ

Андреев С.С., Давыдов А.А., Дбар С.А., Лацис А.О., Плоткина Е.А.
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва

Способ построения высокопроизводительных вычислителей путем объединения большого числа универсальных процессоров сравнительно слабыми каналами связи был основным на протяжении более 20 лет. Сегодня рост числа транзисторов на процессорном кристалле привел к тому, что способ это в качестве основного изжил себя. Построенные таким путем вычислители обладают большим количеством "узких мест"системного характера, их к.п.д. на реальных задачах уже составляет первые проценты и продолжает быстро падать по мере совершенствования элементной базы. Попытка решения проблемы чисто силовым путем, за счет линейного масштабирования системы, приводит не только к еще большему падению к.п.д. и деградации параллельной эффективности, но и к недопустимому росту энергопотребления, трудно разрешимым проблемам с отводом тепла, не говоря уже о естественных проблемах с надежностью.

Все это вынуждает разработчиков высокопроизводительных вычислительных систем искать принципиально новые способы организации вычислителя, то есть разрабатывать новые архитектуры суперкомпьютеров. К сожалению, программировать для таких машин также приходится по-новому, причем в гораздо большей степени по-новому, чем 20 лет назад при переходе от последовательных машин к параллельным.

Переход на новые архитектуры - вынужденный шаг разработчиков, но пользователям от этого не легче. Понимая это, разработчики новых машин стараются делать все возможное для того, чтобы упростить работу по адаптации программ (и программистов) к своим изделиям. Поскольку выполнить такую адаптацию локально, путем изготовления одного или нескольких "чудо-компиляторов невозможно в принципе, приходится принимать нетривиальные архитектурные решения уже при выборе самой общей структуры создаваемой машины. Важнейшим таким решением, на наш взгляд, является решение о гибридной архитектуре, когда в качестве организующего каркаса вычислительной системы берется традиционный вычислительный кластер, а нетрадиционные вычислители имеют вид отдельных небольших сопроцессоров, приданных для усиления каждому узлу кластера. Такое построение машины выгодно со многих точек зрения, в первую очередь - с точки зрения простоты освоения пользователями, но также означает значительное возрастание требований к коммуникационной системе. Таким образом, разработка новых коммуникационных систем и программного обеспечения для них, новых моделей и технологий параллельного программирования становится органичной частью работ по созданию суперкомпьютеров новой архитектуры.

Особенно интересно (и сложно) обстоит дело с программированием собственно сопроцессоров - ускорителей. В последние 2 - 3 года заслуженную популярность в этом качестве приобрели ускорители на базе видеокарт - GPGPU. Однако, такая архитектура ускорителя не является ни единственной, ни наиболее эффективной. Гораздо большую эффективность (в пересчете как на ватт выделяемого тепла, так и на эквивалентный транзистор) обещают, например, "процессоры одной задачи"на базе ПЛИС. Методы их прикладного программирования развиваются в последнее время очень интенсивно.

В ИПМ РАН с участием ФГУП "НИИ "Квант"построен и передан в эксплуатацию опытный образец гибридного суперкомпьютера из 8 узлов, с пиковой производительностью около 6.5 терафлопс, на базе GPGPU и коммуникационной системы собственной разработки. Также интенсивно ведутся работы по вычислительной схемотехнике, котовится ввод в опытную эксплуатацию гибридной машины на ПЛИС.

ТРЕХМЕРНАЯ ДВУХФАЗНАЯ МОДЕЛЬ МГД-СТАБИЛЬНОСТИ АЛЮМИНИЕВОГО ЭЛЕКТРОЛИЗЕРА

Анпилов С.В.[1], Кузьмин Р.Н.[1], Пискажова Т.В.[2], Проворова О.Г.[2], Савенкова Н.П.[1]

[1]*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва*
[2]*Федеральный Сибирский Университет, Красноярск*

Предлагается оригинальная трехмерная модель электролиза алюминия, построенная в двухфазном гетерогенном приближении для смеси двух вязких жидкостей [1, 2]. Основой модели являются система уравнений Навье-Стокса для описания гидродинамических процессов и трехмерная система уравнений Максвелла для расчета токов и электромагнитных полей.

Разработанная трехмерная модель позволяет работать в реальной геометрии - учитывать геометрическое распределение анодов, форму рабочего пространства, гарнисаж электролизной ванны. Исследуется зависимость МГД-стабильности от формы рабочего пространства ванны. Обсуждаются результаты численных экспериментов, проводятся сравнение с результатами, полученными по модели в двухфазном гомогенном приближении [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Нигматулин Р.И.* Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1987.
2. *Нигматулин Р.И.* Динамика многофазных сред, Ч. 1 М.: Наука, 1987.
3. *Н.П. Савенкова, А.В. Шобухов, С.В. Анпилов, Р.Н. Кузьмин., О.Г. Проворова* Математическое моделирование физико-технологических процессов электролизной ванны // Прикладная Физика. 2009.N. 6. С. 43–51.

РАСЧЕТНО-ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ БРОНЕПЛИТ ПРИ УДАРНОМ НАГРУЖЕНИИ

Афанасьева С.А., Белов Н.Н., Буркин В.В., Ищенко А.Н., Югов Н.Т.
Томский государственный университет, Томск

Реакция твердых тел на ударное нагружение носит сложный сугубо индивидуальный характер. Поэтому с помощью только экспериментальных методов вряд ли можно исследовать свойства вещества в достаточно широкой области измерения параметров, характеризующих его состояние. В связи с развитием вычислительной техники резко возросла роль математического моделирования как средства изучения различных явлений и процессов в твердых телах при динамическом нагружении.

Метод исследования свойств материалов, когда физический элемент и математическое моделирование применяются совместно, дополняя друг друга, может быть назван расчетно-экспериментальным. Совместное проведение лабораторного эксперимента и математического моделирования с одной стороны позволяет глубже понять результаты проведенных испытаний и дать им верную интерпретацию, с другой - способствуют уточнению математической модели и выбору численных значений её параметров. В области, недоступной для экспериментальных исследований, поведение материала изучается путем компьютерного моделирования. В данной работе расчетно-экспериментальный метод применяется для анализа динамической прочности бронеплит средней твердости при ударе составными цилиндрическими ударникоми с сердечниками из стали и сплава ВН-91 в диапазоне скоростей 2000. . . 4000 м/с. Рассмотренные варианты демонстрируют различную картину взаимодействия ударников с конечными и "полубесконечными"преградами. Определяется предельная скорость сквозного пробития, условия откольного разрушения.

Экспериментальная часть исследований выполнена на высокоскоростной метательной установке, использующей электротермохимическую технологию ускорения макротел [1,2]. Вычислительный эксперимент проведен на базе математических моделей [3], и реализован в пакете вычислительных программ "РАНЕТ-3" [4], предназначенном для решения задач удара и взрыва в полной трехмерной постановке модифицированным на решения динамических задач методом конечных элементов.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 08-01-00268а и АВЦП "Развитие научного потенциала высшей школы" на 2009-2010 г.г. №21.1.1/4147.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *1. Baryshev M.S., Burakov V.A., Burkin V. V., Ishchenko A.N., Kasimov V.Z.,*

Samorokova N.M., Khomenko Iu.P., Shirokov V.M. Using Plasma to Intensify the Ignition and Combustion of High-Energy Materials // Изв. Вузов. Физика. 2006. №11. Приложение. С. 487-490.

2. *2. Барышев М.С., Бураков В.А., Буркин В.В., Ищенко А.Н., Касимов В.З., Саморокова Н.М., Хоменко Ю.П., Широков В.М.* Разработка импульсных плазмотронов и опыт их применения для насыпных зарядов в баллистических экспериментах // Химическая физика и мезоскопия. 2009. Т. 11. №2. С. 147-152.
3. *3. Белов Н.Н., Югов Н.Т., Копаница Д.Г., Югов А.А.* Динамика высокоскоростного удара и сопутствующие физические явления. // Томск: SST, 2005. 360 с.
4. *4. Югов Н.Т., Белов Н.Н., Югов А.А.* Расчет адиабатических нестационарных течений в трехмерной постановке (РАНЕТ-3) // Федеральная служба по интеллектуальной собственности, патентам и товарным знакам. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ №2010611042. Москва. 2010.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В ПРИДОННОЙ ЧАСТИ ВОСХОДЯЩЕГО ЗАКРУЧЕННОГО ПОТОКА

Баутин С.П., Баутин П.С., Рощупкин А.В.

Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург

В докладе рассмотрены восходящие закрученные потоки (ВЗП) газа, встречающиеся в смерчах, торнадо и тропических циклонах. На основе выдвинутой гипотезы об одном свойстве подобных течений газа [1] предложена схема их возникновения и устойчивого функционирования. В том числе указан внешний, постоянно присутствующий источник энергии, поддерживающий достаточно продолжительное существование природных ВЗП.

Для описания течения в ВЗП строятся точные и приближенные решения системы уравнений газовой динамики [2], описывающие изэнтропические течения идеального политропного газа, соответствующие предложенной схеме восходящего закрученного потока. Рассмотрены плоские течения в полярных координатах, возникающие в придонной части восходящих закрученных потоках воздуха.

Для описания течения в начальные моменты времени поставлена задача о радиальном плавном или резком стоке из однородного покоящегося газа. Доказано, что в этой задаче наряду с радиальным сразу возникает и окружное движение газа. Причем в Северном полушарии закрутка газа идет в положительном направлении, а в Южном – в отрицательном. Рассмотрена система обыкновенных дифференциальных уравнений, решения которой передают стационарные течения газа в придонной части восходящего закрученного потока. Приведены интегралы этой системы. В виде неявно заданных функций, а также при численном построении решений этой системы обыкновенных дифференциальных уравнений построены зависящие только от полярного радиуса течения Для описания процесса формирования придонной части методом характеристик строятся одномерные нестационарные течения газа. Приведены примеры расчета конкретных течений.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00052).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баутин С.П.* Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск: Наука. 2008. 96 с.
2. *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1963. 430 с.

ОДНОМЕРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ В ОКРЕСТНОСТИ ГРАНИЦЫ УРЕЗА

Баутин С.П., Дерябин С.Л.

Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург

Для исследования распространения длинных волн в морских акваториях и последующего наката таких волн на берег широкое распространение получила модель мелкой воды [1]. При приближении волны к берегу линия уреза начинает смещаться в сторону суши, поэтому решение задачи приходится отыскивать в области с подвижной границей. Кроме того, на само́й линии уреза полная глубина жидкости обращается в нуль, что создает дополнительные трудности при численном моделировании взаимодействия волн с берегом. Вследствие этих обстоятельств, для надежности численных методов решения задач с подвижной линией уреза необходимы аналитические исследования поведения решения в процессе наката и отката волн.

В работе выполнено аналитическое исследование решений уравнений мелкой воды в окрестности границы вода-суша для произвольного рельефа дна. Рассмотрены три различных режима взаимодействия волны с берегом: накат необрушенной волны в общем случае, накат необрушенной волны при совпадении в начальный момент времени касательных в точке уреза к свободной границе и рельефу дна, накат с обрушением. Решения поставленных начально-краевых задач построены по методологии [2] в виде локально сходящихся рядов. Получен закон движения границы уреза и найдены условия и моменты времени, когда один режим течения переходит в другой.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00052).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Хакимзянов Г. С., Шокин Ю. И., Барахнин В. Б., Шокина Н. Ю.* Численное моделирование течений жидкости с поверхностными волнами. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2001. 230 с.
2. *Баутин С. П., Дерябин С. Л.* Математическое моделирование истечения идеального газа в вакуум. Наука, Новосибирск, 2005. 390 с.

РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ МЕТОДОМ, БЛИЗКИМ К МЕТОДУ БУБНОВА-ГАЛЕРКИНА

Баутин С.П., Крутова И.Ю., Первушина Н.А.

Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург
Снежинский физико-технический институт Национального исследовательского ядерного университета "МИФИ", Снежинск

Для начально-кравой задачи

$$\mathbf{U} = \mathbf{F}(t, x, \mathbf{U}, \mathbf{U}_x, \mathbf{U}_{xx}), \quad \mathbf{U}(t,x)|_{t=t_0} = \mathbf{U}_0, \quad \mathbf{U}(t,x)|_{x=x_0} = \mathbf{U}_{00}, \tag{1}$$

приближенное решение представляется в виде $\mathbf{U}(t,x) = \sum\limits_{k=1}^{K} \mathbf{a}_k(t)\varphi_k(x)$ и его построение делается в два шага. На первом вычисляется вектор-функция $\mathbf{U}_1 = \mathbf{F}(t, x, \mathbf{U}, \mathbf{U}_x, \mathbf{U}_{xx})$ с учетом начального условия. На втором шаге функция $\mathbf{U}_1(t,x)$ проецируется на выбранную систему функций $\{\varphi_k(x),\ 1 \le k \le K\}$ с помощью метода наименьших квадратов: пр$\mathbf{U}_1(t,x) = \sum\limits_{k=1}^{K} \mathbf{f}(\mathbf{a}_k)\varphi_k(x)$. В результате для функций $\mathbf{a}_k(t)$ имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается численно с учетом вида начальных условий в задаче (1). Предлагаемый метод отличается от традиционно используемых методов типа Бубнова-Галеркина [1].

Применение предлагаемого метода продемонстрировано на решении двух задач: 1) построение плоского закрученного течения со стоком, являющегося решением соответствующей начально-краевой задачи для системы уравнений газовой динамики (системы гиперболического типа) при учете действия силы Кориолиса [2]; 2) моделирование процесса стабилизации одномерного потока вязкого, теплопроводного, сжимаемого газа между теплоизолированными непроницаемыми стенками с помощью построения решения соответствующей начально-краевой задачи для полной системы уравнений Навье-Стокса.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00052).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Флетчер К.* Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988. 320 с.
2. *Баутин С. П.* Торнадо и сила Кориолиса. Новосибирск: Наука, 2008. 96 с.

ВЫСОКОТОЧНОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ ЕМКОСТИ СЛОЖНЫХ ФИГУР С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА МУЛЬТИПОЛЕЙ

Безродных С.И., Власов В.И., Вуоринен М.

Вычислительный центр им. А.А.Дородницына РАН, Москва, Университет г. Турку, Финляндия

Плоским конденсатором называют [1]–[4] двусвязную область D, представимую в виде разности $D = g \setminus \overline{G}$ двух односвязных областей g и G расширенной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, границы которых обозначаем соответственно γ и Γ. Граница Γ является жордановым кусочно–гладким контуром без точек внешего или внутреннего заострения (область G может быть как его внешностью, так и внутренностью). Связные замкнутые множества $\overline{\mathbb{C}} \setminus g$ и $\overline{G}$ называют пластинами конденсатора D.

Если $\psi(w)$ — решение следующей задачи Дирихле в D:

$$\Delta\,\psi(w) = 0,\ w \in D, \qquad \psi(w) = 0,\ \ w \in \gamma, \qquad \psi(w) = 1,\ \ w \in \Gamma, \qquad (1)$$

то согласно [1]–[4] емкость конденсатора D выражается по формуле $C = \int_{\widetilde{\Gamma}} \partial_\nu \psi\, ds$, где $\widetilde{\Gamma}$ — произвольный гладкий жорданов контур, лежащий в D и охватывающий Γ, а $\partial_\nu\psi$ — производная решения по нормали, внешней относительно двусвязной области, границу которой образуют γ и $\widetilde{\Gamma}$.

Метод мультиполей [5] решения задачи (1) и вычисления емкости C заключается в следующем. Пусть $z = F(w)$ — конформное отображение G на внешность единичного круга $U := \{|z| > 1\}$, переводящее некоторую точку $w_0 \in G$ в бесконечность. Определим аппроксимативную систему функций $\{\Omega_n\}_{n=0}^{\infty}$, являющихся мультиполями для области g, по формулам

$$\Omega_0(w) = \mathrm{Re}\big[\ln F(w)\,\big],$$

$$\Omega_{2m-1}(w) = \mathrm{Im}\big[F^m(w) + F^{-m}(w)\,\big],$$

$$\Omega_{2m}(w) = \mathrm{Re}\big[F^m(w) - F^{-m}(w)\big].$$

Согласно [3], [5], функции Ω_n гармоничны в D, удовлетворяют условию $\Omega_n(w) = 0$ на γ и образуют полную и минимальную систему в пространстве $L_2(\Gamma)$, а также в пространстве Харди $e_2(D,\Gamma)$ — гармоническом продолжении $L_2(\Gamma)$ в область D с удовлетворением однородного условия Дирихле на γ. В соотстсвии с этими свойствами указанной системы, решение задачи (1) ищется в виде

$$\Psi(w) = \lim_{K\to\infty} \Psi^K(w), \qquad \Psi^K(w) = \sum_{n=0}^{K} a_n^K \Omega_n(w), \tag{2}$$

где коэфициенты a_n^K находятся из условия $\|\Psi^K - 1\|_{L_2(\Gamma)} = \min$, приводящего к системе линейных уравнений

$$\sum_{n=0}^{K} (\Omega_n, \Omega_m)_{L_2(\Gamma)}\; a_n^K \;=\; (1,\, \Omega_m)_{L_2(\Gamma)}, \qquad m = 0,\, 1,\, \ldots,\, K.$$

При этом оказывается [3], что искомая емкость выражается только через нулевой коэффициент представления (2), а именно,

$$C = 2\pi a_0, \qquad a_0 = \lim_{K\to\infty} a_0^K.$$

Этим методом с высокой точностью были вычислены емкости ряда сложных фигур, для которых, в частности, граница γ области g была нежордановой и неспрямляемой, например ломаной с большим числом сторон.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №10-01-00837), Программы №3 ОМН РАН и Программы РАН ”Современные проблемы теоретической математики“.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Henrici P.* Applied and Computational Complex Analysis, vol 3. N.–Y.: Wiley, Interscience, 1986.
2. *Anderson G.D., Vamanamurthy M.K., Vuorinen M.* Conformal Invariants, Inequalities, and Quasiconformal Maps. N.–Y.: Wiley, 1997.
3. *Власов В.И., Скороходов С.Л.* Метод мультиполей для задачи Дирихле в двусвязных областях сложной формы. I. Общее описание метода // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2000. Т. 40. N. 11. С. 1637–1651.
4. *Betsakos D., Samuelsson K., Vuorinen M.* The computation of capacity of planar condensers // Publ. Inst. Math. 2004. V. 75. N. 89. P. 233-252.
5. *Власов В.И.* Краевые задачи в областях с криволинейной границей. М.: Вычислительный центр АН СССР, 1987.

О ДОКАЗАТЕЛЬНОСТИ КОМПЬЮТЕРНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ (НА ПРИМЕРЕ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ)

Белых В.Н.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

На основе фундаментальных идей К.И. Бабенко [1] построен принципиально новый – *ненасыщаемый* [2] – метод численного решения осесимметричных краевых задач для уравнения Лапласа. Самое существенное в методе заключается в том, что величина "запаса" гладкости точного решения ψ задачи служит показателем успешности его компьютерного построения [3]. В случае $\psi \in C^\infty$ этот метод осуществляет реализацию *доказательных* вычислений [4]. Последнее означает, что по уровню строгости компьютерный ответ представляет собой математическую теорему, содержание которой состоит в описании окрестности точного решения задачи; доказательством же её служит сам процесс компьютерных вычислений, организованный в соответствии с концепцией гарантированной точности [5].

Отметим, что полученный результат появился как реакция на реальную потребность вычислительной гидродинамики [6]-[7].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-01-00207).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с. (2-е издание: М.; Ижевск: РХД, 2002. 848 с).
2. *Белых В.Н.* О свойствах наилучших приближений C^∞-гладких функций на отрезке вещественной оси (к феномену ненасыщаемости численных методов) // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46. № 3. С. 483–499.
3. *Белых В.Н.* Об асимптотике колмогоровской ε-энтропии некоторых классов бесконечно дифференцируемых периодических функций (к проблеме К.И. Бабенко) // ДАН, 2010. Т. 431, № 6. С. 731-735.
4. *Белых В.Н.* Внешняя осесимметричная задача Неймана для уравнения Лапласа: ненасыщаемые методы численного решения // ДАН, 2007. Т. 417, № 4. С. 442-445.
5. *Годунов С.К., Антонов А.Г., Кирилюк О.П., Костин В.И.* Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. Новосибирск: Наука, 1992. 450 с.
6. *Belykh V.N.* To the problem of evolutionary "blow-up" of axially symmetric gas bubble in ideal incompressible fluid (main constructive hypothesis) // В кн.: Proceedings of Intern. Conf. dedicated to M.A. Lavrentyev on the occasion on his birthday centenary. Ukraine, Kiev, 2000, p. 6-8.
7. *Белых В.Н.* К проблеме обтекания осесимметричных тел большого удлинения потоком идеальной несжимаемой жидкости // ПМТФ. 2006. Т. 47.

№ 5. С. 56-67.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ УЛЬТРАРЕЛЯТИВИСТСКИХ ПУЧКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Боронина М.А., Вшивков В.А.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск

Современное состояние фундаментальной физики и ее успехи неразрывно связаны с работой ускорителей заряженных частиц. Ввиду большой стоимости и сложности ускорителей, очень важно уже на этапе проектирования этих установок проводить численное моделирование и оптимизацию их параметров, имея в арсенале надежные теоретические и экспериментальные данные. Одно из направлений такой деятельности связано с развитием новых физических и технических идей с целью увеличить светимость, которая является главным показателем эффективности коллайдера - ускорителя для экспериментов по физике высоких энергий на встречных пучках.

Наиболее полно такая задача может быть решена методами математического моделирования, учитывающими трехмерный характер взаимодействия.

В настоящей работе предложен новый PIC-алгоритм для численного моделирования динамики встречных ультрарелятивистских пучков. В основе метода лежат два допущения, связанных с проблемой начальных и граничных условий для таких задач. Первое из них заключается в том, что расчетная область находится в ближней зоне, где запаздывание потенциала еще не играет существенной роли. Вторым допущением является представление пучка не в качестве набора отдельных частиц, а в виде непрерывной среды. Реализация таких предположений в программном коде впервые позволила моделировать полностью трехмерные и ультрарелятивистские задачи.

Исследована работа алгоритма в задачах взаимодействия модельных пучков с веером пробных частиц, проведено математическое моделирование эффектов встречи на примере встречных пучков с учетом фокусировки. Приведены результаты сравнения результатов с данными, полученными с помощью программы Guinea-Pig, на примере сфокусированных встречных пучков.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-01-00615).

О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМОДИНАМИКЕ (памяти А.И. МОРОЗОВА)

Брушлинский К.В.
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

Алексей Иванович Морозов (1928–2009) – выдающийся советский физик, идеолог и основоположник ряда успешных разработок новой плазменной техники. Его достижения в теории и организации экспериментов в современной физике плазмы в значительной степени обязаны постоянным работам по математическому моделированию плазменных процессов с большим объемом расчетов. Ему принадлежит постановка необходимых задач, и он же был постоянным участником и соавтором численных исследований в обширной области науки, которую он любил называть плазмодинамикой [1]. Доклад предполагает обзор математических моделей и результатов в этой области.

По инициативе и под руководством А.И. Морозова созданы несколько разновидностей плазменных ускорителей. Известный пример - квазистационарный сильноточный плазменный ускоритель (КСПУ) с рекордными параметрами скорости и энергии плазменной струи и широкими перспективами применения. Его разработке и исследованиям способствовали теория и расчеты стационарных течений плазмы в каналах - соплах, образованных двумя коаксиальными электродами. В МГД-модели и ее модификациях с учетом эффекта Холла и конечной проводимости подробно исследованы основные свойства течений, объяснены причины "кризиса тока"в приэлектродных зонах и указаны пути их преодоления, рассмотрены особенности процесса ионизации газа [2,3]. Другой пример - стационарные плазменные двигатели (СПД) малой мощности, но с большим ресурсом времени работы, которые успешно используются на спутниках Земли с 1971 г. Теоретические основы непростых принципов их работы и относящиеся к ним численные исследования изложены в обзоре [4] и последующих журнальных статьях.

А.И. Морозовым внесен большой вклад в разработку магнитных ловушек для удержания плазмы. Ранние работы относятся к расчету геометрии магнитного поля, которое образует "скелет"плазменных конфигураций в тороидальных системах [5]. Впоследствии им предложена идея ловушек - "галатей": расположение токонесущих проводников внутри плазменного объема дает большее разнообразие геометрии равновесных магнитоплазменных конфигураций и возможность повысить параметры удержания [6]. В численных исследованиях магнитных ловушек, выполненных в плазмодинамических и плазмостатических моделях, получены результаты, эффективные в приложениях, а также поставлены и решены математические и вычислительные вопросы фундаментального характера. Специальное внимание уделено проблеме устойчивости равновесных конфигураций.

Вопросы математического моделирования плазмы, связанные с упомянутыми приложениями, изложены в [3] с подробной библиографией. Работы, обсуждаемые в докладе, поддержаны РФФИ (гранты № 09-01-00181, № 09-01-12056 - офи-м)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Морозов А.И.*. Введение в плазмодинамику. -М.: Физматлит, 2008
2. *Брушлинский К.В., Морозов А.И.* Энциклопедия низкотемпературной плазмы. Под ред. В.Е. Фортова, Серия Б, Т. IX-2, С. 334–369. - М.: Янус-К, 2007
3. *Брушлинский К.В.* Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. - М.: Бином. Лаборатория знаний. 2009.
4. *Morozov A.I., Savelyev V.V.* Reviews of Plazma Phys. N.Y. Consultant Bureau, 2000. V. 21, P. 203–391
5. *Морозов А.И., Соловьев Л.С.* Вопросы теории плазмы. -М.: Госатомиздат, 1963, Вып. 2, С. 3–91.
6. *Морозов А.И., Савельев В.В.* УФН, 1998. Т. 168. № 11, С. 1153–1194

КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЕ РЕШЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ПОРЯДКОВ ТОЧНОСТИ ТРЁХМЕРНЫХ ЗАДАЧ ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМА

Бутюгин Д.С., Ильин В.П.

Институт Вычислительной Математики и Математической Геофизики СО РАН, Новосибирск

Работа посвящена экспериментальному исследованию эффективности применения конечно-элементных базисных функций различных порядков [1] на тетраэдральных сетках при моделировании трехмерного электромагнитного поля в частотной области. Рассматриваются постановки задачи как для электрического поля $\vec{E}$, так и смешанные постановки для векторных и скалярных потенциалов $\vec{A}$–V [2] и постановки с множителем Лагранжа [3]. Для решения систем линейных алгебраических уравнений, получающихся в результате аппроксимации соответствующих краевых задач, используются предобусловленные итерационные методы в подпространствах Крылова, такие как CG, CR, QMRSym, MINRES и GMRES [4].

Результаты экспериментов, проведенных на ряде методических задач, показывают эффективность предлагаемых методов. Проводятся численные эксперименты для исследования вопроса выбора оптимального порядка базисных функций для достижения заданной точности численного решения с минимальными вычислительными затратами. Численные эксперименты для волноводов с однородными и неоднородными средами и различными краевыми условиями также демонстрируют сходимость конечно-элементных решений на последовательности сгущающихся сеток.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-01-00526)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ingelström P.* A new set of H(curl)-conforming hierarchical basis functions for tetrahedral meshes // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 2006. Vol. 54, №1, Pp. 106-114.
2. *Dyczij-Edlinger R., Biro O.* A joint vector and scalar potential formulation for driven high frequency problems using hybrid edge and nodal finite elements // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 1996. Vol. 44, №1, Pp. 15-23.
3. *Greif C., Schötzau D.* Preconditioners for the discretized time-harmonic Maxwell equations in mixed form // Numer. Linear Algebra Appl. 2007. Vol. 14, Pp. 281–297
4. *Saad Y.* Iterative methods for sparse linear systems. SIAM, 2003.

РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДОВ БЕЗ НАСЫЩЕНИЯ

Варин В.П.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

Методы без насыщения, теорию которых создал К.И.Бабенко [1], до сих пор не получили широкого распространения, не смотря на их высокую эффективность. Одна из причин этого – необходимость определенных инвестиций со стороны разработчика, прежде чем преимущества методов без насыщения становятся очевидными. Другая причина – недостаток информации об опыте их использования в различных математических и вычислительных задачах. В докладе обсуждается опыт такого применения к некоторым задачам, где эти методы играют ключевую роль, и где их применение является необходимым.

Подробно рассматривается задача о колебаних базилярной пластины человеческого уха. Эти колебания описываются дифференциальным уравнением четвертого порядка с переменными комплексными коэффициентами с краевыми условиями на концах интервала и интегральным условием сохранения массы [2]. Это уравнение очень близко к сингулярному, поэтому обычные численные методы решения краевых задач оказались не пригодны. Разработанный численный метод без насыщения, созданный с применением системы компьютерной алгебры, позволил получать решения с контролируемой, произвольно заданной точностью в широком диапазоне частот, что позволило оптимизировать параметры задачи, моделирующие звуковое восприятие.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ
1. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. Ижевск: РХД, 2002. 847 с.
2. *Варин В.П., Петров А.Г.* Гидродинамическая модель слуховой улитки человека // ЖВМ и МФ. 2009. Т. 49. N. 9. С. 1708–1723.

ПРИМЕНЕНИЕ ПОДХОДОВ MPI И OpenMP В ПРОГРАММНЫХ КОМПЛЕКСАХ, РЕАЛИЗУЮЩИХ МЕТОД КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА

Волков Б.В., Новиков П.А., Филимонов А.В., Якушев В.Л.
Институт автоматизации проектирования РАН, Москва
ООО "ЕВРОСОФТ", Москва

Применение параллельных вычислительных систем является стратегическим направлением развития вычислительной техники. Это обстоятельство вызвано не только принципиальным ограничением быстродействия обычных последовательных ЭВМ, но и практически постоянным увелчением размерности вычислительных задач, для решения которых требуется разработка новых алгоритмов и программных средств.

Рассмотрено два принципиально разных подхода к параллелизации для многопроцессорных вычислительных систем с общей и распределенной памятью.

Для систем с распределенной памятью, таких как супер ЭВМ "Падма принадлежащая Институту автоматизации проектирования Российской академии наук (ИАП РАН), использовался подход MPI. В его основе лежит процесс обмена сообщениями между вычислительными блоками, каждый из которых обладает своей оперативной памятью и вычислительными процессорами. Распараллеливание применялось при решении систем симметричных положительно-определенных уравнений AX=B, возникающих при использовании метода конечных элементов. Область решения задачи разделялась на непересекающиеся подобласти (метод подконструкций). Задача была успешно решена на многопроцессорной вычислительной машине с использованием различного количества вычислительных блоков.

Для систем с общей памятью, таких как персональный компьютер с одним или несколькими процессорами или ядрами, использовался подход OpenMP. В этом подходе параллельная программа представляет собой систему нитей, взаимодействующих между собой посредством общих переменных и примитивов синхронизации.

Вышеописанные методы были успешно применены для прочностного расчета стадиона Зенит в Санкт-Петербурге. Использовался, хорошо распараллеливаемый метод подконструкций. Его использование на основании этих подходов позволило существенно понизить требования к оперативной памяти компьютера, повысить размерность задачи, сгустив конечно-элементную сетку модели и добиться большей точности полученных результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Жук Ю. Н., Симбиркин В. Н., Филимонов А. В., Якушев В. Л.* Применение метода подконструкций для решения больших задач методом конечных элементов// С.-Петербургский научный форум "Наука и общество Информационные технологии: Тезисы докладов, С.-Петербург, 21-25 сентября 2009 г. - С. 255-259.

МЕТОДЫ МЕЛКОЗЕРНИСТОГО РАСПАРАЛЛЕЛИВАНИЯ В МЕТОДИКЕ ТИМ-2D

Воропинов А.А. , Новиков И.Г., Соколов С.С.
РФЯЦ-ВНИИЭФ, ИТМФ, Саров

Методика ТИМ-2D [1] предназначена для расчета нестационарных двумерных за-дач механики сплошной среды на неструктурированных лагранжевых сетках произвольной структуры. По методике ТИМ-2D можно проводить расчёты на сетках, состоящих из не самопересекающихся многоугольных ячеек, в узлах сетки может сходиться произвольное количество ребер. Для расчета задач газодинамики и упругопластичности используются явные конечноразностные схемы. Кинематические величины хранятся в узлах счетной сетки, термодинамические величины в центрах ячеек.

При решении сложных двумерных задач начальную геометрию системы часто приходится разбивать на счетные области. Такое разбиение необходимо для более точного описания взаимодействующих тел с выделенными линиями скольжения, называемые контактными границами. Методика ТИМ-2D позволяет проводить расчеты в многообластной постановке. При этом предполагается, что разные математические области могут взаимодействовать друг с другом вдоль контактных линий [2].Расчет контактного взаимодействия производится в начале счетного шага, а затем контактные границы выступают в качестве навязанных граничных условий при расчете математических областей. Расчет самих областей производится независимо друг от друга.

Для повышения точности проводимых расчётов и более адекватного численного моделирования протекающих процессов в двумерных задачах, не редко приходится выбирать сетки с большим количеством ячеек. В последовательном режиме расчёт сложных задач занимает достаточно много календарного времени, и в связи с этим обстоятельством их необходимо проводить в параллельном режиме.

В настоящее время наиболее распространенными стандартами для распараллеливания являются: интерфейс передачи сообщений MPI, для модели распределенной памяти, и интерфейс OpenMP, предназначенный для модели общей памяти. Для методики ТИМ-2D реализовано трехуровневое распараллеливание. На верхнем уровне осуществляется распараллеливание счета по математическим областям в модели распределенной памяти с использованием интерфейса передачи сообщений MPI. На втором уровне производится распараллеливание внутри счетной области по параобластям (счетная область разбивается на фрагменты), также с использованием MPI. На третьем (нижнем) уровне осуществляется распараллеливание итераций счетных циклов в модели общей памяти с использованием интерфейса OpenMP. Эти подходы могут использоваться как вместе в различных сочетаниях, так и раздельно при расчете одной задачи.

В докладе подробно рассматриваются два метода мелкозернистого распараллеливания для методики ТИМ-2D. В первом используется наложение в один слой ячеек между параобластями [3]. На каждом шаге производится обмен величинами в ячейках и узлах в слое наложения в асинхронном режиме. Второй метод мелкозернистого распараллеливания не использует наложение между параобластями, между параобластями производится расчет контактного взаимодействия по специальным алгоритмам, которые схожи с алгоритмами расчета контактного взаимодействия между математическими областями, и являющиеся полным аналогом расчета не граничных точек областей.

В докладе описываются вопросы сочетания мелкозернистого распараллеливания с распараллеливанием на верхнем и нижнем уровнях, рассмотренные ранее [4]. Описываются различные варианты проведения расчета в параллельном режиме. Приводятся замеры ускорения и эффективности распараллеливания на методических расчетах.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

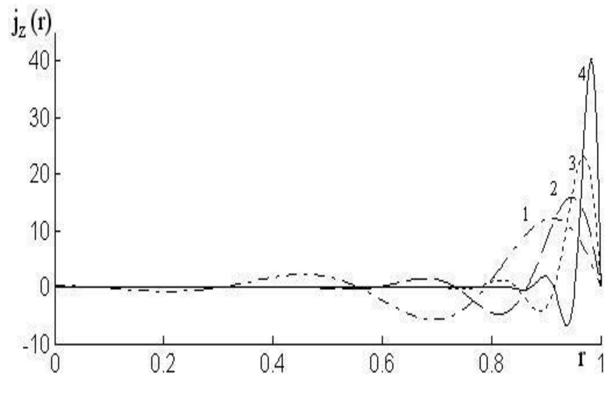
1. *Соколов С.С., Воропинов А.А., Новиков И.Г., и др.* Методика ТИМ-2D для расчета задач механики сплошной среды на нерегулярных многоугольных сетках с произвольным количеством связей в узлах // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2006. Вып. 4. С. 29-43.
2. *Воропинов А.А., Новиков И.Г., Соколов С.С.* Расчет контактного взаимодействия между счетными областями в методике ТИМ-2D // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2008. Вып. 2. С. 3-18.
3. *Воропинов А.А.* Алгоритмы мелкозернистого распараллеливания в методике ТИМ-2D // Вычислительные методы и программирование. 2009. Том 10. С. 112-120.

4. *Воропинов А.А., Соколов С.С., Новиков И.Г.* Двухуровневое распараллеливание в модели смешанной памяти для расчета задач газодинамики в методике ТИМ-2D // Вопросы атомной науки и техники. Сер. Математическое моделирование физических процессов. 2008. Вып. 1. С. 51-59.

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ПЛАЗМЫ С УЧЁТОМ ИНЕРЦИИ ЭЛЕКТРОНОВ В КРУГЛОЙ ТРУБЕ

Гавриков М.Б., Таюрский А.А.
Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва

В докладе исследованы вынужденные колебания несжимаемой плазмы в круглой цилиндрической трубе под действием гармонически изменяющегося с частотой ω полного тока. При этом в полном объеме учтены инерция электронов и ток смещения. Сравнение точных решений задачи о вынужденных колебаниях на основе классической несжимаемой МГД и двухжидкостной МГД с учетом инерции электронов приводит к заключению о необходимости учета конечной массы электронов для анализа динамики перетяжечной плазмы. Проанализированная пространственно-временная структура вынужденных колебаний, в частности, наиболее важная особенность - скинирование параметров течения по границе шнура, проливает свет на возможный механизм образования гетерогенных пинчей. На рисунке показан случай скинирования плотности тока $j_z(r)$ при $\omega \to +\infty$. Даны профили для четырёх характерных частот: 1 - $\omega = 10^9$Гц, 2 - $\omega = 10^{10}$Гц, 3 - $\omega = 10^{11}$Гц, 4 - $\omega = 10^{12}$Гц.



Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант №08-01-00299).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гавриков М.Б., Таюрский А.А.* Вынужденные колебания вязкой несжимаемой плазмы с учетом инерции электронов в круглой трубе // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2010. N. 1. С. 176–192.

МЕТОДИКА И ПРОГРАММА ЛОГОС РАСЧЕТА ЗАДАЧ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА НА ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ЭВМ

Глазунов В.А., Голубев А.А., Дерюгин Ю.Н., Жучков Р.Н., Зеленский Д.К., Мельников В.М., Козелков А.С., Полищук С.Н., Шагалиев Р.М.
РФЯЦ-ВНИИЭФ, ИТМФ, Саров

Пакет программ ЛОГОС предназначен для решения связанных и сопряженных трехмерных задач тепломассопереноса и аэродинамики на параллельных ЭВМ.

Математическая модель, реализованная в пакете программ, включает три группы уравнений. Первую группу уравнений составляют уравнения Навье Стокса описывающие течения вязкого газа и уравнения моделей турбулентности. Для описания турбулентных течений привлекаются различные модели, такие как однопараметрические дифференциальные модели турбулентной вязкости Секундова и Спаларта-Алмареса, двухпараметрические (k, ε) и (k, ω) модели турбулентности и многопараметрические модели турбулентности относительно компонент тензора напряжений Рейнольдса. При расчете течений на стенках каналов могут быть поставлены граничные условия скольжение, прилипание, симметрия потока и условие периодичности потока. На входе в канал задается либо расход, либо давление. Возможна постановка краевой задачи, когда задан перепад давления по каналу.

Тепловые поля в конструкциях определяются на основе решения уравнения теплопроводности. В оптически прозрачных средах тепловые поля находятся из решения интегрального уравнения переноса излучения:

$$J_\nu^-(P,t) = \int\limits_{S(p)} J_\nu^+(Q,t)\frac{\cos(\vec{n}_p, \vec{P}Q)\cos(\vec{n}_Q, \vec{Q}P)}{\pi r^2(P,Q)} dS_Q$$

где $J_\nu^-(P,t)$, $J_\nu^+(P,t)$ – односторонние потоки излучения частоты ν, а интеграл берется только по области прямой видимости $S(P)$, т.е. по тем точкам Q, которые непосредственно видны из точки P.

На поверхностях, разделяющих твердотельные конструкции и прозрачные среды, задаются обменные граничные условия. На границе теплопроводной области, могут быть заданы граничные условия первого, второго и третьего рода.

Задача решается в произвольной, в том числе и в многосвязной области. В процессе решения возможно изменение геометрии области (например, вследствие газодинамического воздействия и нагрева, разрушения фрагментов области и т.п.) и изменение ее состава.

Основными принципами, лежащими в основе построения расчетных методик являются:

- сегментация счетной области на подобласти,

- расщепление по физическим процессам: расчет вязких течений, расчет теплопроводности, расчет напряженно деформированного состояния, и др.,
- использование подвижных и неподвижных, структурированных и неструктурированных сеток,
- использование неявных разностных схем.

Построение методов решения уравнений описывающих вязкие течения основано на методе конечных объемов и использование неявных разностных схем: PISO, SIMPLE, TVD. Метод решения уравнения теплопереноса, основано на кончно-объемной неявной разностной схеме. Метод решения уравнения переноса излучения постоен с использованием коэффициентов видности.

Организация параллельных вычислений основана на геометрической декомпозиции и использовании параллельных решателей. При геометрической декомпозиции заложена возможность балансировки загрузки процессоров по количеству ячеек, с учётом физических процессов рассчитываемых в них, и минимизации объёмов межпроцессорных обменов. Для осуществления межпроцессорных обменов используются асинхронные вызовы, которые позволяют производить обмены информацией одновременно с работой счётных программ.

В докладе приводятся результаты тестовых и методических расчетов. Приводится оценка эффективности параллельных вычислений.

МЕТОД НЕПОЛНОЙ БЛОЧНОЙ ФАКТОРИЗАЦИИ ДЛЯ КОМПЛЕКСНОГО УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Горбенко Н.И.

ИВМ и МГ СО РАН, Новосибирск

Численное решение различных проблем в научных вычислениях требуют решения системы линейных алгебраических уравнений

$$Ax = b,$$

где матрица A имеет следующий вид $A = B + iC$. Здесь $B-$ симметричная положительно определенная, а $C-$ знакоопределенная диагональная матрицы. При этом мы будем рассматривать только матрицы, имеющие блочно-трехдиагональную структуру, т.е. вида

$$A = \begin{bmatrix} D_1 & -L_1^T & & \\ -L_1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -L_{n-1}^T \\ & & -L_{n-1} & -D_n \end{bmatrix}$$

Подобные системы уравнений возникают при аппроксимации краевых задач для уравнения Гельмгольца, уравнения Шредингера, в квантовой хроматографии и т.д. Чтобы эффективно численно решать краевые задачи для эллиптических уравнений итерационными методами, основанными на подпространствах Крылова, необходимо использовать надежные предобуславливатели. Один из таких кандидатов - блочный метод неполной факторизации. Он успешно применяется для краевых задач, которые после дискретизации сводятся к системам линейных алгебраических уравнений с М - матрицами, имеющими блочно-трехдиагональную структуру. Вданной работе мы приводим обоснование применения неполной блочной факторизации для симметричных комплексных систем алгебраических уравнений.

МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА ПРИ ОБТЕКАНИИ МОДЕЛЕЙ СТРУЕЙ НЕРАВНОВЕСНОГО ВОЗДУХА В ИНДУКЦИОННОМ ПЛАЗМОТРОНЕ

Горшков А.Б.
Центральный научно-исследовательский институт машиностроения, Королев, Московская область

При разработке космических аппаратов, движущихся в атмосфере Земли или других планет с гиперзвуковыми скоростями, большое значение имеет создание эффективной тепловой защиты. Поскольку натурные эксперименты очень дороги, для моделирования в наземных условиях реальных полетных параметров обтекания широко используются различного рода генераторы низкотемпературной плазмы - плазмотроны. Схематично конструкция плазмотрона состоит из последовательно установленных двух камер: разрядной, где в поток газа вкладывается энергия, и рабочей, в которой происходит обтекание моделей с образцами теплозащитного покрытия струей высокотемпературного диссоциированного и ионизованного газа, истекающей из разрядной камеры.

В данной работе представлены результаты расчетов обтекания экспериментальных моделей в рабочей камере индукционного высокочастотного плазмотрона на основе численного решения уравнений Навье-Стокса для неравновесного химически реагирующего воздуха. Исследовалось влияние конфигурации модели и отношения радиусов струи и модели на картину течения, в частности на возможное образование отрывной области на боковой поверхности, а также на распределение теплового потока. Течение в струе предполагалось дозвуковым и ламинарным. Было рассмотрено также влияние величины вероятности гетерогенной рекомбинации атомов из газовой фазы на поверхности модели на уровень конвективных тепловых потоков к ней.

Уравнения Навье-Стокса, описывающие осесимметричное течение химически неравновесной смеси газов, записываются в консервативном виде в произвольной неортогональной системе координат. Воздух предполагался состоящим из 9 химических компонентов. Колебательные степени свободы считались равновесно возбужденными с температурой равной поступательной. Расчетная область образовывалась внешней границей, осью симметрии и поверхностью тела. Граничные условия, отвечающие входной части внешней границы расчетной области, задавались с использованием локально одномерных инвариантов Римана. Интегрирование системы уравнений Навье-Стокса осуществлялось численно конечно-разностным методом с использованием неявной итерационной схемы. Более детальная постановка задачи приведена в [1]. Выполнено распараллеливание программы для проведения расчетов на многопроцессорном вычислительном комплексе T-Edge [2].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 09-01-00171-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Горшков А. Б.* Численное исследование теплообмена экспериментальных моделей в рабочей камере индукционного плазмотрона // ТВТ. 2010. Т.48. № 3. С.449-457.
2. *Горшков А. Б.* Параллельный алгоритм при расчете неявным методом на основе уравнений Навье - Стокса гиперзвукового обтекания тел неравновесным газом // Математическое моделирование. 2009. Т.21. № 9. С.43-53.

КОНСЕРВАТИВНАЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФОРМА ЗАКОНОВ СОХРАНЕНИЯ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Грудницкий В.Г.
ВЦ РАН, Москва

Предлагаемый доклад содержит результаты работ автора опубликованных в течение последних лет [1,2]. В них решена одна из проблем, стоявших перед исследователями разрывных течений сжимаемой среды достаточно долгое время. Она заключалась в особом статусе разрывов (ударных волн и контактных разрывов), которые считались особыми линиями. Следствием этого явилось отсутствие достаточных критериев устойчивости при построении разрывных решений и, в целом, отсутствие сколько-нибудь строгой теории анализа (и как следствие, расчёта) таких течений на разрывах. Предложенное в [1,2] тождественное характеристическое преобразование, позволило перевести законы сохранения в квазилинейную характеристическую форму без потери консервативности, и ввести разрывы в аппарат анализа разрывных течений в качестве естественного элемента.

Уравнения, описывающие движение сплошной среды впервые опубликовал Леонард Эйлер. Они имеют квазилинейный характер. Для исследования их решений был разработан аппарат характеристик, имеющий, соответственно, квазилинейный характер. В середине 20-го века на основании уравнений Эйлера, была получена система законов сохранения в дивергентной форме. При её выводе не производится линеаризация приращений потоков и функций, что обеспечивает её консервативность. Однако квазилинейный характеристический аппарат не был при этом заменён.

В законах сохранения, очевидно, связаны между собой потоки и соответствующие им функции. Независимые координаты (во всяком случае, декартовы) не более чем пространственные (временные) метки, к которым приписывается решение. Логично нормировать друг к другу приращения потоков и функций, то есть приращения разрывных величин относить к разрывным. Приращения независимых координат (непрерывных величин) естественно относить друг к другу.

Ключевую роль в преобразовании законов сохранения к консервативному характеристическому виду играет тождественная замена разностей потоков течением распада разрыва. Покажем процедуру вывода указанной формы законов сохранения для одной пространственной переменной

$$\frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = 0, \quad \vec{\varphi} = \left\| \begin{array}{c} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{array} \right\|, \vec{F} = \left\| \begin{array}{c} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ (\rho E + p)u \end{array} \right\| \tag{1}$$

Здесь ρ- плотность, u- скорость, p - давление, $E = e + u^2/2$ - энергия единицы массы, e- внутренняя энергия. Система (1) в конечных разностях имеет вид

$$\Delta_t \vec{\varphi} + \frac{\tau}{h} \Delta_x \vec{F} = 0 \tag{2}$$

В (2) тождественно заменим разности потоков суммой (вообще говоря, бесконечной) возмущений распространяющихся из одной точки с разными скоростями (рис. 2.1). Для этого относим приращения потоков к приращениям соответствующих им функций. Возникающие отношения, имеют размерность скорости. В дальнейшем (кроме (5)-(6)) нижний индекс i задаёт номера скоростей возмущений, значений функций и потоков, возникающих при следующей тождественной замене

$$\begin{gathered} \Delta_x \vec{F} \equiv (\vec{F}_{b(N)} - \vec{F}_{a(0)}) \equiv (\vec{F}_N - \vec{F}_{N-1}) + (\vec{F}_{N-1} - \vec{F}_{N-2}) + ... + (\vec{F}_1 - \vec{F}_0) \equiv \\ \equiv \overrightarrow{\left[\tfrac{F_N - F_{N-1}}{\varphi_N - \varphi_{N-1}}\right] (\varphi_N - \varphi_{N-1})} + .. + \overrightarrow{\left[\tfrac{F_1 - F_0}{\varphi_1 - \varphi_0}\right] (\varphi_1 - \varphi_0)} \equiv \sum_{i=1}^{N} \overrightarrow{V_i(\varphi_i - \varphi_{i-1})}; \\ \overrightarrow{\left[\tfrac{F_i - F_{i-1}}{\varphi_i - \varphi_{i-1}}\right]} = \vec{V}_i; \end{gathered} \tag{3}$$

В (3) индексами $b(N)$, $a(0)$ отмечены значения величин с правой и левой стороны разрыва, индекс i - номер слагаемого в сумме (3), координаты векторов соответствуют номерам уравнений в (1). Скорости $\vec{V}_i$, если они задают скорости устойчивых возмущений, должны подчиняться преобразованию Галилея (индекс i опускается в (4)-(5))

$$\vec{V}(u+v) = \vec{V}(u) + v \tag{4}$$

Здесь v **имеет произвольное значение**. Соотношение (4) означает линейную зависимость скоростей устойчивых возмущений от скорости течения. (В то время как формально она имеет нелинейный характер).

Выполнение (4) даёт в результате (для всех значений i)

$$\frac{[u(\rho E + p)]}{[\rho E]} = \frac{\left[p + \rho u^2\right]}{[\rho u]} = \frac{[\rho u]}{[\rho]} \tag{5}$$

Возмущения устойчивы в случае, если скорости их распространения совпадают для всех уравнений законов сохранения (вывод, по существу, очевидный). Итак, чтобы добиться совпадения скоростей возмущений для всех уравнений системы, необходимо представить их в виде суммы (интеграла) множества устойчивых возмущений.

$$\Delta_x \vec{F} \equiv \sum_{i=1}^{N} V_i(\vec{\varphi}_i - \vec{\varphi}_{i-1}) \equiv \sum_{i=1}^{N} V_i \Delta \vec{\varphi}_i \tag{6}$$

В (6) с учётом (5) знак вектора над скоростями V_i опущен._Замена_(6) приводит (2) (dt, $dx \to 0$) к виду

$$\Delta_t \vec{\varphi} + \frac{\partial x}{\partial t} \sum_{i=1}^{N} V_i \Delta(\vec{\varphi})_i = 0 \tag{7}$$

Равенства (7) задают в достаточно общем виде характеристическую форму законов сохранения сплошной среды. В каждое уравнение (7) явно входит одна неизвестная функция и коэффициенты, общие для всех уравнений. При этом уравнения (7) консервативны уже потому, что они тождественны законам сохранения. Аналогично преобразуются в характеристическую форму законы сохранения в случае двух и трёх измерений [1,2]. К характеристическому виду несложно привести любую вычислительную схему, если она использует законы сохранения в дивергентной форме.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Грудницкий В.Г.* Достаточное условие устойчивости при явном построении разрывных решений системы уравнений Эйлера // ДАН- 1998.- т.362, №3.- С.298-299.

2. *Грудницкий В.Г.* Нелинейные проблемы законов сохранения сплошной среды // Изд.-тво “Спутник+” - Москва- 2009.

БИБЛИОТЕКА ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ КРЫЛОВА ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД НА ГРАФИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОРАХ

Губайдуллин Д.А., Никифоров А.И., Садовников Р.В.
Учреждение Российской академии наук Институт механики и машиностроения КазНЦ РАН, Казань

Методы подпространств Крылова с предобуславливанием являются наиболее общей группой итерационных методов, применяемой в настоящее время для решения разреженных систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Такие системы уравнений возникают при численном решении широкого класса задач математической физики, описываемых дифференциальными уравнениями в частных производных: задачи теплопроводности, задачи гидродинамики многофазных сред и др. Создано множество различных библиотек программ, которые предназначены для решения разреженных СЛАУ большой размерности на различных архитектурах центральных процессоров, а также параллельных вычислительных кластерах, построенных на их основе (например, Aztec, PetSc, Trilinos и др). Как правило, библиотеки программ используют итерационные методы с предобуславливанием и отличаются форматами представления матриц, типами предобуславливателей, способами обмена сообщениями между процессорами и связаны с архитектурой параллельной вычислительной системы, типами поддерживаемых платформ и др. В последнее время возрос интерес к параллельным вычислениям на графических процессорах, таких как NVIDIA GeForce, Tesla в связи с их высокой производительностью и низкой себестоимостью. При программировании с использованием графических процессоров, последнее рассматривается как вычислительное устройство, способное выполнять большое число одинаковых вычислений параллельно. Это особенно удобно для применения в задачах линейной алгебры в операциях над матрицами и векторами. В данной работе представлена библиотека итерационных методов подпространств Крылова с предобуславливанием для решения разреженных СЛАУ с нерегулярной структурой, как симметричных, так и не симметричных. Библиотека итерационных методов предназначена для пользователей, которые хотят избежать трудностей и деталей параллельного программирования на графических процессорах, но которым приходиться иметь дело с большими разреженными СЛАУ и необходимо использовать эффективность параллельной архитектуры графических процессоров. Детали реализации структуры данных отделены от математического алгоритма с помощью шаблонов и объектно-ориентированного программирования на языке C++. Векторы и матрицы записаны в виде шаблонов классов, так что они могут использоваться для расчетов как с одинарной, так и с двойной точностью. Алгоритмы итерационных методов записаны в виде функций в формате шаблона, так что они могут использоваться с любой матрицей и вектором, обеспечивая необходимый уровень функциональности. Библиотека предназначена для использования как на одном, так и на нескольких графических устройствах одновременно. Представленные в библиотеке методы протестированы на примере численного решения задач фильтрации методом контрольных объемов. Проведенные тесты показали, что использование графических процессоров позволяет значительно ускорить расчеты.

Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН №14 «Интеллектуальные информационные технологии, математическое моделирование, системный анализ и автоматизация»

ПРОГРАММНЫЙ КОМПЛЕКС ДЛЯ РАСЧЕТА ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ НА ГИБРИДНОМ СУПЕРКОМПЬЮТЕРЕ «МВС-ЭКСПРЕСС»

Давыдов А. А.

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва

Развитие вычислителей с нетрадиционной (не фон-неймановской) архитектурой, и их успешное применение для решения прикладных задач [1], привело к появлению суперкомпьютеров на их основе. А именно, к появлению гибридных суперкомпьютеров [2, 3].

Создание вычислительных установок, построенных на новых принципах, требует разработки прикладного программного обеспечения, эффективно использующего оборудование.

В рамках опытной эксплуатации суперкомпьютера «МВС-Экспресс», созданного в ИМП им. М. В. Келдыша РАН совместно с НИИ «КВАНТ» [2], написан параллельный программный комплекс для решения двух и трехмерных уравнений Эйлера на многоблочных структурированных сетках, а также, квазигазодинамических уравнений [4].

В процессе разработки и применения комплекса исследован и обоснован ряд технических решений для создания следующего поколения отечественных гибридных установок. Среди них, выбор той или иной модели ускорителя, а также, обоснование необходимости использование быстрой сети с низкой латентностью.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ. Проекты 08–07–00086–а и 08–08–00356–а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Давыдов А. А. Применение графических процессоров для расчета задач аэродинамики. XVII Всероссийская конференция "Теоретические основы и конструирование численных алгоритмов для решения задач математической физики с приложением к многопроцессорным системам посвященная памяти К.И. Бабенко.
2. Andreev S.S., Davydov A.A., Dbar S.A., Karagichev A.B., Lacis A.O., Plotkina E.A.: The experience of building a sample hybrid NUMA cluster. Proceedings of International Conference "Distributed computing and Grid technologies in science and education Dubna, Russia (2008)
3. №№ 2,7,19 в 35 редакции списка TOP 500, июнь 2010 г. http://www.top500.org
4. Четверушкин Б.Н. Кинетические схемы и квазигазодинамическая система уравнений. М.: Макс Пресс, 2004.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА ОКОЛО НАДКАЛИБЕРНЫХ ОБТЕКАТЕЛЕЙ

Даньков Б.Н., Липницкий Ю.М., Панасенко А.В.
ФГУП Центральный научно-исследовательский институт машиностроения, Королев

При исследовании трансзвукового обтекания надкалиберных обтекателей (НКО) ракет носителей (РН) сложной конфигурации установлено возникновение бегущих и стоящих акустических волн в межблочных каналах [1]. Получение этих колебаний в расчетном плане является в настоящее время актуальной задачей. При этом основная трудность в расчете связана с необходимостью аппроксимации структурных элементов течения газа в значительных по размерам областях, по отношению к размерам РН.

Расчеты проведены в рамках модели уравнений Навье-Стокса при числах Маха в диапазоне M=0,7-0,95. В качестве геометрии использована типовая форма надкалиберного обтекателя РН, аналогичная рассмотренной в [1].

Особое внимание при проведении расчетов уделено формированию основных структурных элементов газодинамического течения: положению трансзвуковой зоны, местоположениям критического и замыкающего скачков уплотнения, отрывным областям течения в окрестности трансзвуковой зоны и обратного конуса.

Получены зависимости вышеперечисленных структурных элементов течения в зависимости от числа Маха, находящиеся в соответствии с экспериментальными данными. Отмечено, что нестационарный характер поведения давления на поверхности НКО коррелирует с колебаниями отрывной зоны, что находится в качественном соответствии с экспериментальными данными.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №08-08-00356, Роснауки, проект 02.740.11.0204 и при использовании вычислительных ресурсов МСЦ,

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Даньков Б.Н, Косенко А.П., Куликов В.Н., Отменников В.Н.* Волновые возмущения в трансзвуковых отрывных течениях // МЖГ, 2006, №6, с. 153 - 165.

О ТРЕХУРОВНЕВОМ ПАРАЛЛЕЛЬНОМ АЛГОРИТМЕ ОБРАТНОЙ МИГРАЦИИ ВО ВРЕМЕННОЙ ОБЛАСТИ (RTM) НА ОСНОВЕ КОМПАКТНЫХ СХЕМ

Довгилович Л.Е.

Московский Физико-Технический Институт, Москва

Московский научно-исследовательский центр Шлюмберже, Москва

Применение метода RTM в сейсморазведке получает все большее распространение, несмотря на значительные вычислительные ресурсы при его использовании. В основе RTM лежит многократное вычисление волновых полей на сетках с миллионами узлов в 2D и миллиардами в 3D геометрии.

Алгоритм метода RTM состоит из следующих главных этапов: а)вычисление волновых полей в “прямом времени”. Волновое поле U генерируется от источника в пункте взрыва и запоминается как функция пространства и времени для построения изображения; б)вычисление волновых полей в “обратном времени”. Волновое поле V генерируется от сейсмограмм в приемниках, и производится построение изображения с использованием свертки V с U по времени; в)суммирование изображений, полученных от разных пунктов взрывов.

В [1] было предложено использовать вместо центрально-разностных схем (ЦРС) компактные схемы (КС) для повышения эффективности расчетов.

В данной работе мы строим двумерный трехуровневый параллельный алгоритм RTM, реализованный на основе КС и приводим результаты расчетов, подтверждающие преимущества КС перед привычными ЦРС.

Разработанный алгоритм RTM имеет три вложенных уровня параллельности вычислительных потоков для обеспечения оптимальной производительности кластера. Первый уровень заключается в параллелизации расчетов изображения для разных положений пункта взрыва. На втором уровне происходит декомпозиция вычислительной области для параллельного счета на нескольких вычислительных узлах. В случае применения ЦРС данный метод не вызывает проблем. Для компактных схем – в силу их неявности – был предложен и реализован специальный алгоритм, позволивший преодолеть затруднения с декомпозицией. На третьем уровне порождаются несколько вычислительных нитей и нить асинхронного ввода/вывода данных. Такое разбиение позволяет равномерно нагрузить все ядра узла, избежать лишних копирований данных и осуществлять вывод на жесткий диск параллельно с вычислением волновых полей.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 10-01-00567.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Довгилович Л.Е.Софронов И.Л.* О применении компактных схем для решения волнового уравнения // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН № 84, Москва (2008)

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ПЕРЕНОСА НЕРАВНОВЕСНОГО СПЕКТРАЛЬНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ И ЕГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ВЕЩЕСТВОМ

Долголева Г.В.

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва

При расчете большого количества задач физики и механики одними из определяющих процессов является перенос излучения фотонами и взаимодействие излучения с веществом. Для решения системы уравнений, описывающей перенос излучения и взаимодействие излучения с веществом, существует много моделей. Перенос излучения рассматривается в приближении спектральной квазидиффузии. В этой системе уравнений сложно записать релаксацию энергии между веществом и излучением, так чтобы схема была неявной (иначе будет мелкий шаг по времени) и выполнялось условие баланса.

В докладе исследуются различные схемы (явные, неявные) на их устойчивость. В случае неявных итерационных схем привлекается их исследование на сходимость итераций.

Особое внимание уделено двум схемам расщепления. В первой схеме расщепление по спектру, а во второй вся система расщепляется на две: первая описывает спектральный перенос излучения, а вторая изменение энергии вещества и излучения в результате их взаимодействия. Для второй подсистемы записано три разностные схемы. Приводится сравнение результатов, полученных по этим схемам, с аналитическими решениями и известными решениями.

Делаются выводы о слабых и сильных сторонах рассматриваемых разностных схем.

ТЕРМОЯДЕРНАЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА НА ОСНОВЕ Z-ПИНЧА

Долголева Г.В.[1], Забродина Е.А.[2], Чуразов М.Д.[2]
[1]*Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва*
[2]*ИТЭФ, Москва*

Для получения управляемой реакции термоядерного синтеза легких элементов предлагаются различные технические системы - токамак, ИТИС, каждая из которых имеет свои сложности реализации. Наряду с ними можно рассмотреть т/я установку на основе z-пинча с дейтерием (DD) в качестве рабочего вещества. Предполагается, что ускоритель создает мощную струю DD-плазмы плотностью порядка 10-8 г/см3, которая вводится в область магнитного поля. Оно сжимает плазму, одновременно ее разогревая, до плотностей и температур, достаточных для т/я зажигания. Так как струя имеет изначально высокую скорость (5?108 см/с), разогретое вещество через некоторое время покидает зону магнитного поля, а на его место приходит новая порция холодной плазмы. Если струю плазмы заключить в кольцевую трубу, то процесс т/я горения можно сделать почти стационарным. В такой системе т/я энерговыделение невелико, но его можно попытаться усилить, если трубу сделать из урана-238, который будет поглощать рождающиеся в DD нейтроны и выделять энергию за счет деления.

Был проведен ряд расчетов одномерных и двумерных моделей по подбору оптимальных размеров и скоростей плазменной струи. Было показано, что можно найти такое сочетание параметров, чтобы, с одной стороны, получить плотность (около 10-6 г/см3) и температуру (около 20 кэВ), достаточные для т/я зажигания и поддержания энерговыделения мощностью 300 - 1000 МВт, а с другой стороны, избежать полного пережатия струи магнитным полем и ее разрушения. Таким образом, процесс т/я энерговыделения можно сделать достаточно продолжительным (до 1 мкс), чтобы такую систему в дальнейшем рассматривать как энергетическую.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Е.А. Забродина, Д.Г. Кошкарёв, М.Д. Чуразов.* Нейтронный источник для гибридной (Fusion+Fission) системы // ВАНТ, серия "Математическое моделирование физических процессов в печати.

ПАКЕТ ПРОГРАММ ЛЭГАК-ДК. МЕТОДЫ КОРРЕКТИРОВКИ СЕТКИ И ПЕРЕСЧЕТА ВЕЛИЧИН НА ЭЙЛЕРОВОМ ЭТАПЕ

Дьянов Д.Ю.[1], Куканов С.С.[2], Мышкина И.Ю.[1], Резвова Т.В.[1], Речкин В.Н.[2], Рябов А.А.[2], Симонов Г.П.[1], Спиридонов В.Ф.[1], Циберев К.В.[1]

[1] *РФЯЦ-ВНИИЭФ, ИТМФ, Саров*

[2] *Саровский инженерный центр, Саров*

В пакете программ ЛЭГАК-ДК при решении системы уравнений газовой динамики используется расщепление на лагранжев и эйлеров этапы. На лагранжевом этапе узлы сетки движутся вместе с веществом, и при интенсивных течениях качество сетки может заметно ухудшаться. Для поддержания приемлемых свойств сетки выполняется эйлеров этап, который состоит из процедуры корректировки сетки (согласно заданным критериям) и пересчета величин с лагранжевой сетки на откорректированную. В работе рассмотрены алгоритмы корректировки сетки совместно с критериями выбора "плохих"ячеек и численные схемы пересчета величин на неструктурированных сетках, реализованные в методике ЛЭГАК-ДК. Проведена верификация и валидация реализованных алгоритмов на ряде задач. Результаты численного моделирования некоторых из них представлены в данной работе.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 08-01-00807а).

МЕТОДЫ РАСЧЕТА ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНЫХ ПРОЦЕССОВ

Жуков В.Т., Феодоритова О.Б.

Институт прикладной математики им.М.В. Келдыша РАН, Москва

Моделирование мишеней термоядерного синтеза основано на описании газодинамических процессов в одно- или трехтемпературном приближениях (НЗТ, [1]) с учетом термоядерных и нейтронно-ядерных реакций. Базовым элементом НЗТ является алгоритм [2] решения начально-краевых задач для системы нестационарных уравнений газовой динамики в областях сложной формы с подвижными границами. Для расчетов тепловых процессов авторами данной работы построена пространственно-временная дискретизация уравнения теплопроводнсти (или трех уравнений в случае трехтемпературной модели), согласованная с газодинамическим этапом. Со времени первых публикаций накоплен опыт использования предложенных схем, обеспечивших эффективное функционирование кода НЗТ на многопроцессорных системах. В данной работе систематизированы основные сведения о разработанных схемах и условиях их использования. Принципы дискретизации носят достаточно универсальный характер и могут быть использованы при решении других задач.

Здесь ведется изложение для случая неортогональных сеток с криволинейными ячейками четырехугольной формы, а сеточные функции считаются заданными в центрах ячеек. Для аппроксимации по пространству записывается закон сохранения тепла для каждой сеточной ячейки. Потоки тепла на сторонах (ребрах) ячеек находятся интерполяцией значений сеточной функции (температуры или её степени) на локальном шаблоне узлов. Интерполяция производится методом наименьших квадратов в квадратичном базисе в локальной криволинейной системе координат. Система координат строится с учетом расположения узлов шаблона ребра, что вместе с аппроксимацией ребер дугами окружностей обеспечивает свойство сохранения симметрии решений. При наличии у сетки той или иной симметрии криволинейная система координат непрерывно переходит в прямоугольную декартову или полярную систему координат.

Для решения на каждом шаге по времени системы трех дискретных уравнений теплопроводности (или одного уравнения в случае однотемпературной модели) используется явно-итерационная схема ЛИ-М с чебышевскими параметрами. Эта схема обеспечивает высокую фактическую точность и эффективное функционирование на многопроцессорных системах (при выбранном способе пространственной дискретизации). Конструкция схемы ЛИ-М позволяет легко включить расчет теплопроводных процессов в систему разностных законов сохранения. В итоге обеспечивается сохранение баланса тепла для каждой ячейки сетки, что принципиально при расчетах высокотемпературных процессов. Схема ЛИ-М возникла как развитие схемы, предложенной В.О. Лукуциевским и О.В. Лукуциевским. Каждый из внутренних шагов (называемый для удобства итерацией) схемы ЛИ-М эквивалентен явной схеме счета и поэтому идеально распараллеливается. Если формально исключить внутренние итерации, то схему ЛИ-М можно представить как явную разностную схему с увеличенным в p раз шаблоном узлов пространственной дискретизации. Привлекательность состоит в том, что p – кратное увеличение шаблона дает возможность увеличить шаг счета по времени в p^2 раз. Схема ЛИ-М может иметь более широкие приложения, поэтому в данной работе уделяется внимание общим принципам использования схемы в системах законов сохранения при наличии диссапативных процессов. Теоретическое обоснование схем локальных итераций проведено для многомерных линейных параболических уравнений, но как показывает опыт, схема может быть использована и для более общих эволюционных уравнений и систем.

Главная идея конструкции схемы ЛИ-М принципиально отличается от стандартного чебышевского ускорения итераций: выбор числа итераций и итерационных параметров диктуется условиями аппроксимации и устойчивости, а не оптимизацией сходимости итераций к решению неявной схемы. Схему ЛИ-М в задачах с гладкими решениями можно использовать как предиктор, тогда получается схема ЛИ-2 второго порядка точности [3].

Принцип построения схем ЛИ отличаются и от способ получения устойчивых явных схем на основе методов Рунге—Кутты с использованием многочленов Чебышева. Для иллюстрации приводится пример одного из методов такого типа, приводящий к потере точности вследствие ухудшения аппроксимации по пространству. В этом принципиальное отличие явно-итерационных схем от явной схемы, для которой условие устойчивости естественным образом обеспечивает точность численного решения. Поэтому для исследования качества явно-итерационных схем нужно использовать приемы, примеры которых приведены в данной работе.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 08-01-00144-а, 09-01-12024-офи-м.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алалыкин Г.Б., Жуков В.Т., Забродин А.В. и др.* Методика численного моделирования двумерных нестационарных течений теплопроводного газа в трехтемпературном приближении в областях сложной формы с подвижными границами (НЗТ). -М.: ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, отчет НИР 8-1-04. 2004. 244 с.
2. Численное решение многомерных задач газовой динамики. С.К. Годунов, А.В. Забродин, М.Я. Иванов, А.Н. Крайко, Г.П. Прокопов. -М.:Наука. 1976. 400 с.
3. *Жуков В.Т.* О явных методах численного интегрирования для параболических уравнений // Матем. моделирование, 2010. В печати.

ПОСТАНОВКА ПРОЗРАЧНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ ОБЛАСТЕЙ С НЕГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Зайцев Н.А.

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, Москва

Постановка прозрачных граничных условий (ПГУ) на гладких внешних границах расчётной области разработана достаточно хорошо теоретически и технологически [1-4]. Для линейных задач с постоянными коэффициентами и простыми границами (сфера, окружность, прямая) коэффициенты оператора ПГУ могут зачастую быть вычислены аналитически [5-7]. Для задач с переменными коэффициентами или границами более сложной формы для вычисления коэффициентов оператора ПГУ необходимо решить численно определённое количество вспомогательных задач с очень высокой точностью (порядка 10^{-12} и выше). Такие расчёты являются весьма трудоёмкими, но в результате полученный оператор ПГУ является полностью эквивалентным решению задачи во внешней отброшенной области. Эффективные методы решения таких задач разработаны в работах [1-4].

Для задач с разрывными коэффициентами вопрос о расчете коэффициентов оператора ПГУ до сих пор не решен удовлетворительно. Причина этого кроется в том, что неизвестно как ставить корректно вспомогательные задачи во внешней области.

Но даже для уравнений с постоянными коэффициентами в области с негладкими границами постановка ПГУ является трудной задачей, т.к. в точках негладкости границы могут возникать (и возникают) особенности в решении вспомогательных задач.

Одним из способов решения этой проблемы является погружение расчетной области в область с гладкой границей. Если это сделано с самого начала и есть алгоритм, который позволяет удовлетворительно рассчитывать решение вплоть до гладкой границы, то задачу можно считать решённой. Но во многих случаях задача построения оператора ПГУ формулируется следующим образом. Пусть имеется расчётная область с негладкой границей, в которой решение удовлетворяет некоторым, вообще говоря, нелинейным уравнениям, и для расчёта решения во внутренних точках расчётной области имеется подходящий алгоритм. Требуется поставить на границе такие граничные условия, которые удовлетворяют трём требованиям. 1) Погрешность в решении, вносимая постановкой искусственных граничных условий, не превышает ошибки вычислений внутри области. 2) Время расчёта решения на границе не делает его бессмысленным из-за слишком больших временных затрат. Ещё лучше, если это время мало по сравнению с расчётом решения внутри области. 3) Алгоритм расчёта решения на границе не вносит более жёстких ограничений на шаг по времени, чем это делает алгоритм расчёта решения внутри области. При такой постановке задачи можно погрузить расчётную область (область интереса) в область большего размера с гладкой границей, но алгоритм для расчёта решения внутри области уже дан и может быть продиктован особенностями задачи в глубине области. Возникает задача о расчёте решения во вспомогательной области между областью интереса и гладкой границей.

В настоящей работе предложен эффективный метод расчёта решений во вспомогательной области, удовлетворяющий для большинства алгоритмов во внутренней области трём сформулированным выше требованиям. Приведены численные примеры для волнового уравнения во внешней области, показывающие эффективность и устойчивость метода.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 10-01-00567.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Sofronov I. L., N. A. Zaitsev.* Non-reflecting boundary conditions for 2D anisotropic elastodynamics, PAMM, V. 6, Iss. 1, 611 - 612 (2007)

2. *Sofronov I. L., N. A. Zaitsev.* Application of transparent boundary conditions for solution of 2D elastodynamics with azimuth anisotropy, Mathematical Modeling, V. 19, №8, 49-54 (2007) [in Russian]
3. *I.L. Sofronov, N.A. Zaitsev.* Transparent boundary conditions for the elastic waves in anisotropic media, Hyperbolic Problems: Theory, Numerics, Applications. Eds. Benzoni-Gavage, Serre. Springer Verlag, p. 997-1004 (2008)
4. *I.L. Sofronov, N.A. Zaitsev.* Numerical generation of transparent boundary conditions on the side surface of a vertical transverse isotropic layer, Journal of Computational and Applied Mathematics, Online publication: 21-AUG-2009; V. 234, Issue 6 ,1732-1738 (2010)
5. *Sofronov I. L.* Conditions for complete transparency on a sphere for the three-dimensional wave equation, Doklady Akademii Nauk, 1992, Vol. 326, No. 6, pp. 453-457 (Russian). Translation in Doklady Mathematics, 1993, Vol. 46, No. 2, pp. 397-401
6. *Sofronov I. L.* Non-reflecting inflow and outflow in wind tunnel for transonic time-accurate simulation, J. Math. Anal. Appl., V. 221, (1998) 92-115.
7. *Sofronov I. L.* Artificial boundary conditions of absolute transparency for two- and three-dimensional external time-dependent scattering problems, Euro. J. Appl. Math., V.9, No.6 (1998) 561-588.

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ПРОЦЕССОВ КРИСТАЛЛИЗАЦИИ МЕТАЛЛОВ

Зайцев Н.А., Рыков Ю.Г.

Институт прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН

В книге [1] была сформулирована новая модель процессов кристаллизации металлов. Ее новизна заключается в том, что моделирование проводится одновременно на нескольких масштабных уровнях, от микро до макро. Такая модель возникла вследствие настоятельной потребности в математическом моделировании реальных технологических процессов, где необходима интегральная картина явления, которая учитывает динамические неравновесные процессы, протекающие одновременно на нескольких структурных уровнях (например, технология производства литых лопаток газотурбинных двигателей). В этой ситуации сложившиеся подходы к моделированию кристаллизации в основном на микроуровне оказываются недостаточными.

Хотя к настоящему времени экспериментальные исследования позволили установить многие детали явления кристаллизации металлов, но общего теоретического представления об этом процессе пока не существует. Основной причиной такого положения дел является сложность исследуемого феномена, выражающаяся в необходимости учитывать как процессы, происходящие на уровне атомов и их комплексов (микромасштаб), так и процессы, протекающие на макроуровне (модель сплошной среды). В предлагаемом докладе приводятся результаты численного исследования одномерного варианта этой модели.

Исследуемая модель основана на представлении о пространстве кристаллизующегося сплава как о пористой среде, распространение возмущений в которой описывается уравнениями типа Био [2]. Для описания процесса образования зародышей используется модифицированное уравнение Кана-Хилларда [3]. Построена соответствующая численная схема и продемонстрирована ее сходимость. Также показана возможность получения различных режимов кристаллизации при изменении параметров. Работа является лишь первым шагом в исследовании свойств такой целостной разномасштабной модели, кроме того, для расчетов требуются значительные вычислительные ресурсы, поэтому исследуется только одномерный случай. Многомерный вариант предполагается изучить в последующих публикациях, используя многопроцессорные вычислительные комплексы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты № 09-01-12024 офи-м, № 09-01-00288.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Радкевич Е.В.* Математические вопросы неравновесных процессов. - Новосибирск, Изд. Тамара Рожковская, Белая книга, т.4, ISSN 1817-3799, 2007, 285 с.
2. *M.A. Biot.* Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media // J.Appl.Phys., 1962, v. 33(4), pp. 1482-1498.
3. *J.W. Cahn, J.E. Hilliard.* Free energy of a non-uniform system III: Nucleation in a two-component incompressible fluid // J. Chemical Physics, 1959, v.31, pp. 688-699.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В СФЕРИЧЕСКОЙ ПАРОЖИДКОСТНОЙ ЯЧЕЙКЕ

Ильин В.П., Ицкович Е.А.
Институт Вычислительной Математики и Математической Геофизики СО РАН, Новосибирск

Изучение волновых процессов в парожидкостных средах является актуальным во многих научно-технических приложениях. В работе рассматривается модель парового пузырька в несжимаемой жидкостной ячейке, на границе которой мгновенно приложено внешнее давление. Математическая постановка включает уравнение теплопроводности для двухфазной среды с движущейся внутренней границей, положение которой определяется системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Алгоритмы решения основаны на двухуровневом итерационном процессе для реализации неявных схем с конечно-объемной аппроксимацией краевой задачи на динамической сетке. Исследуются вопросы эффективности предлагаемых численных методов. Приводятся результаты вычислительных экспериментов по решению методических примеров, а также по моделированию характерных волновых процессов при многообразных значениях физических параметров задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 08-01-00526)

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ПОИСКА СОЛИТОННЫХ РЕШЕНИЙ, НЕЗАВИСЯЩИЙ ОТ ВИДА НЕЛИНЕЙНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Ильютко В.П., Кузьмин Р.Н., Лапонин В.С., Савенкова Н.П.
МГУ им. М.В.Ломоносова, ВМК, Москва

Настоящая работа посвящена описанию итерационного метода нахождения солитонных решений нелинейных дифференциально-эволюционных уравнений. Под солитонным решением в работе подразумевается уединенная волна, которая локализована в небольшой области, быстро стремится к нулю при удалении от области локализации, и профиль которой не изменяется с течением времени.

Получение решения в аналитическом виде для уравнений, имеющих солитонные решения, представляет проблему из-за нелинейности самого дифференциального уравнеия, но и по причине существования кроме N-солитонных решений и обычных несолитонных решений. (Например в уравнении Кортевега-де Фриза)

Практически для всех известных эволюционно-нелинейных уравнений приходится разрабатывать свои разностные схемы, учитывающие особенности уравнения, для получения солитонного решения. В работе предлагается метод, который не зависит от вида нелинейного оператора, входящего в дифференциальное уравнение, и, в этом смысле, является универсальным методом.

Демонстрируется применение предлагаемого метода для поиска солитонных решений уравнений : Кортевега-де Фриза, Шредингера, Sin-Гордона. Приводится сравнение предлагаемого метода с другими методами поиска солитонных решений, обсуждаются преимущества и недостатки нового метода.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кившаръ Ю.С., Агравал Г.П.* Оптические солитоны. Москва: Физматлит, 2005. 522 с.
2. *Мива Т., Джимбо М., Датэ Э.* Солитоны: дифференциальные уравнения, симметрии и бесконечные алгебры. Москва: МЦНИО, 2005, 312 с.

3. *Дорохова Т.В., Савенкова Н.П., Трофимов В.А.* Численное моделирование солитонных решений задачи распространения фемтосекундного импульса в среде с кубической нелинейностью.// Прикладная математика и информатика, сб. ф-та ВМК, Москва, 1999, № 2, с. 63–68.

ПРИМЕНЕНИЕ РАЗРЫВНОГО МЕТОДА ГАЛЕРКИНА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ МАССОПЕРЕНОСА

Иткина Н.Б.

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск

Математическая модель процесса массопереноса в химическом реакторе характеризуется, как правило, преобладанием конвективных членов и наличием точечных источников массы, что создает определенные трудности при построении устойчивой вычислительной схемы стандартным непрерывным методом конечных элементов.

В работе предлагается вычислительная схема, являющаяся дискретным аналогом вариационного уравнения, полученного разрывным методом Галеркина [1].

Вариационная постановка для модели конвекция-диффузия-реакция содержит специальные стабилизаторы, обеспечивающие подавление нефизичных осцилляций решения. Предлагаемая вариационная постановка позволяет естественым образом поддерживать процедуру построения несогласованных сеток с локальными сгущениямии и использование локальных базисов различных порядков на различных конечных элементах.

Исследование влияния специальных стабилизаторов на точность решения модельных задач конвекции-диффузии-реакции позволило определить оптимальные значения штрафных параметров для рассматриваемой вычислительной схемы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Buffa A.* , Hughes T.J.R. and Sangalli G. Analysis of a multiscale discontinuous Galerkin method for convection-diffusion problems//SIAM Journal Numerical Analysis. 2006. № 44. P.1420-1440.

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ, ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ И ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

Ким А.В., Волохова Л.Е., Заводников Д.Е.

Институт Математики и Механики Уральского Отделения Российской Академии Наук, Екатеринбург

В докладе представлены численные алгоритмы решения функционально-дифференциальных уравнений, соответствующие параллельные алгоритмы и программное обеспечение. Обсуждаются результаты моделирования процессов с последействием на многопроцессорном вычислительном комплексе ИММ УрО РАН.

Приведены результаты расчетов задач математической физики с эффектом наследственности.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проекты 08-01-00141 и 10-01-00377), программой Президиума РАН «Фундаментальные науки в медицине» (21П) и Урало-Сибирским междисциплинарным проектом.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ким А.В., Пименов В.Г.* i-Гладкий анализ и численные методы решения ФДУ. М.-Ижевск, Регулярная и хаотическая динамика. 2004.
2. *Ким А.В., Красовский А.Н.* Математическое и компьютерное моделирование систем с последействием. Екатеринбург, Изд-во УГТУ. 2010.
3. *Кордуняну К., Ким А.В., Волохова Л.Е., Заводников Д.Е.* Фазовые портреты функционально-дифференциальных уравнений. Труды ИММ УрО РАН (в печати).

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДЕФОРМАЦИИ И РАЗРУШЕНИЯ КОМПОЗИТА МЕДЬ - МОЛИБДЕН МЕТОДОМ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ДИНАМИКИ

Киселев С.П.

Институт теоретической и прикладной механики им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск

Методом молекулярной динамики решена задача о деформации и разрушении нанокомпозита медь - молибден при высокоскоростном одноосном растяжении. Нанокомпозиты, состоящие из медной матрицы с цилиндрическими наноразмерными включениями из молибдена, обладают хорошими проводящими и противоэрозионными свойствами и используются в импульсной сильноточной электронике. В процессе эксплуатации они подвергаются воздействию импульсов давления, поэтому актуальной задачей является определение прочностных свойств данного композита.

Методом МД рассчитывались координаты и скорости всех атомов, после чего находились средние деформации и напряжения в "ячейке". Взаимодействие между атомами в ячейке описывалось с помощью многочастичного МЕАМ потенциала (M. Baskes, 1992). В результате проведенных проведенных расчетов был исследован механизм разрушения и деформации нанокомпозита и показано, что:

Разрушение композитной наночастицы наступает после упругой и упругопластической деформации, и происходит путем зарождения и роста пор на дефектах кристаллической решетки. В монокристаллической медной наночастице возникновение дефектов происходит равномерно во всем объем наночастицы. В композитной наночастице медь - молибден, зарождение и рост пор происходят в медной компоненте в окрестности контактной границы,в областях локализованной деформации (в полосах сдвига), зарождающихся в окрестности включения. Прочность композитной наночастицы медь - молибден ниже, чем прочность монокристаллической медной наночастицы. Это связано с наличием дефектов в композитной наночастице в окрестности контактной границы матрица - включение. Найдены критические значения напряжения и деформации разрушения композитной наночастицы медь - молибден при одноосном растяжении.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-00108-а), Интеграционного проекта СО РАН № 40, гранта Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ № НШ-4292.2008.1.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА В ПОРШНЕВОЙ ГАЗОДИНАМИЧЕСКОЙ УСТАНОВКЕ

Кислых В.В., Кудимов Н.Ф., Липницкий Ю.М., Панасенко А.В., Петрова О.В.

ФГУП Центральный научно-исследовательский институт машиностроения, Королев

Поршневая газодинамическая установка (ПГУ) обеспечивает отработку в наземных условиях, максимально приближенных к натурным, на крупномасштабных моделях различных летательных аппаратов, перспективных воздушно-космических систем и их элементов. В работе с использованием суперкомпьютеров ФГУП ЦНИИмаш и МСЦ проведено математическое моделирование газодинамического течения в ПГУ.

Метод расчета состоит из решения 2-х взаимосвязанных различных по своей физической природе задач: расчета динамики движения поршня и расчета газодинамического нестационарного процесса в стволе ПГУ. Расчет проводится методом конечных объемов в декартовой системе координат. Наличие пространственной симметрии геометрии расчетной области учитывается путем построения соответствующей расчетной сетки.

Задача расчета движения поршня сводится к интегрированию на каждом временном шаге методом Рунге-Кутта 4-го порядка системы уравнений:

$$dV/dt = S(Pb - Pp)/Mp - Fv \qquad \text{и} \qquad dx/dt = V.$$

Начальным условием является текущая скорость поршня V и его x-координата. При этом учитывается уменьшение со временем величины толкающего давления Pb и текущее изменение давления на поршне со стороны сжимаемого им газа Pp (Mp – масса поршня, S – площадь поверхности поршня, Fv – сила трения поршня о поверхность ствола ПГУ).

Расчет газодинамического нестационарного процесса в стволе ПГУ является нестандартным, вследствие наличия ускоряющегося поршня, который является левой границей расчетной области, и неподвижной правой границы. Особенностью разработанного метода расчета является алгоритмическое ограничение расчетной области газодинамического процесса со стороны поршня, путем исключения из расчета участка области, которую прошел поршень. В результате расчет проводится в лабораторной системе координат, связанной с неподвижной ПГУ. На каждом временном шаге расчет потоков на левой границе проводится в 3 этапа: 1) проводится пересчет параметров в прилегающей к поршню ячейке в мгновенную систему координат, связанную с поршнем; 2) проводится расчет отражения потока от неподвижной стенки (распад разрыва); 3) проводится обратный пересчет параметров в прилегающей к поршню ячейке в лабораторную систему координат. После чего проводится стандартный расчет параметров газа в ячейках расчетной области по выбранному численному методу.

Параллелизм основан на расчленении расчетной области задачи газодинамики по параллельным каналам в продольном направлении ПГУ. При этом на каждом параллельном канале решаются обе вышеуказанных задачи.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект №09-08-12057 ОФИм, Роснауки, проект 02.740.11.0204 и при использовании вычислительных ресурсов МСЦ.

КВАЗИЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ, СВЯЗАННАЯ С УРАВНЕНИЕМ ГРЭДА–ШАФРАНОВА

Костомаров Д.П.

Факультет вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва

В 50-е годы XX века, когда только начинались работы по проблеме управляемого термоядерного синтеза, было получено уравнение Грэда–Шафранова, описывающее равновесие тороидального плазменного шнура [1]. Это эллиптическое уравнение 2-го порядка с нелинейностью в недифференциальных членах. В 60–70-е годы математики начали изучать задачу на собственные значения и собственные функции для квазилинейных эллиптических уравнений [2, 3]. Потом два научных направления пересеклись: методы и результаты исследования задачи на собственные значения и собственные функции стали использоваться в физике плазмы [4, 5].

В докладе мы упрощаем квазилинейную задачу на собственные значения и собственные функции, заменяя эллиптический оператор оператором двукратного дифференцирования по одной переменной, и получаем в результате задачу для обыкновенного дифференциального уравнения. Одномерную задачу удается проинтегрировать в квадратурах. Несмотря на достаточно сложную форму ответа, это позволяет на качественном уровне понять характерные особенности задачи. Рассматриваются девять вариантов функций, определяющих нелинейность в уравнении: среди них монотонные функции и немонотонные функции с точками экстремума. Для каждого варианта исследуется структура спектра и кратность собственных значений задачи. Эти характеристики слабо зависят от ее размерности. Поэтому такой просмотр позволяет отобрать варианты, наиболее интересные с точки зрения физики плазмы и перейти к их детальному исследованию в полной математической постановке с помощью численных методов [6].

Работа выполнена в рамках государственных контрактов П-958 от 20 августа 2009 года и № 02.740.11.0196 по ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» и проекта 08-01-00721 Российского фонда фундаментальных исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Шафранов В.Д.* ЖЭТФ. 1957. Т. 33. N. 3. С. 710–722.
2. *Похожаев С.И.* ДАН СССР. 1965. Т. 165. N. 1. С. 36–39.
3. *Lions P.L.* SIAM Review. 1982. Т. 24. N. 4. С. 441–467.
4. *Temam R.* Comm. Part. Diff. Eq. 1976. Т. 2. С. 583–585.
5. *Lackner K.* Comput. Phys. Comm. 1976. Т. 12. N. 1. С. 33–44.

6. *Костомаров Д.П., Медведев С.Ю., Сычугов Д.Ю.* Матем. моделирование. 2008. Т. 20. N. 5. С. 3–34.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ НА ПОВЕРХНОСТИ МЫЛЬНОГО ПУЗЫРЯ

Кузьмин Р.Н., Савенкова Н.П., Складчиков С.А.
МГУ имени М.В.Ломоносова, факультет вычислительной математики и кибернетики, Москва

В работе представлена математическая модель физического эксперимента проведенного исследователями из Центра радиоволн и молекулярной оптики (Centre de Physique Moleculaire Optique et Hertzienne, CPMOH) в Бордо (Франция), которые обнаружили, что вихри, определенным образом созданные в мыльных пузырях, ведут себя аналогично более масштабным атмосферным явлениям, таким как циклоны и ураганы, что дает возможность промоделировать факторы, управляющие траекторией их поведения. Суть эксперимента состоит в том, что исследователи нагревают мыльный пузырь по экватору в результате чего на его поверхности образуется вихревое движение. В данной работе представлена математическая модель, в основе которой находится предположение о растечении жидкости по выпуклой поверхности. Математическое моделирование проводиться отдельно для верхней и для нижней частей сферы “склеенных” посередине на основе трехмерных уравнений гидродинамики. Проводится анализ численных результатов и сравнение их с экспериментальными данными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кузьмин Р.Н., Кулешов А.А., Савенкова Н.П., Филиппова С.В.* Численное моделирование растечения фреона по неровной подстилающей поверхности. "Математика. Компьютер. Образование". Сб. трудов II международной конференции.с.154-159.
2. *F. Seychelles, Y. Amarouchene, M. Bessafi, H. Kellay.* Thermal Convection and Emergence of Isolated Vortices in Soap Bubbles// Phys. Rev. Lett. 100, 144501 (7 April 2008).

МОДИФИКАЦИЯ ЭЙЛЕРОВА ЭТАПА МЕТОДА КРУПНЫХ ЧАСТИЦ НА ОСНОВЕ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО РАСПАДА РАЗРЫВА

Куликов И.М.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск

Метод крупных частиц ранее применялся для решения газодинамических уравнений без учёта гравитации, но в последнее время [1, 2] стал использоваться для решения задач гравитационной газовой динамики. Этот метод обеспечивает автоматическое выполнение законов сохранения и состоит из двух этапов: эйлеров, на котором уравнения газовой динамики решаются без конвективных членов, и лагранжев, на котором происходит конвективный перенос газодинамических величин.

Рассмотрен один из способов линеаризации уравнений на эйлеровом этапе метода крупных частиц. Для этого на всех границах расчётных ячеек рассматривается линеаризованная система уравнений эйлерова этапа:

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\rho_L}+\frac{1}{\rho_R}\right) \\ (\gamma-1)\frac{p_L+p_R}{2} & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial n}\begin{pmatrix} v \\ p \end{pmatrix} = 0, \qquad (1)$$

где v — скорость, p — давление, γ — показатель адиабаты, ρ — плотность, индексы L и R — положение ячеек (левая/правая). Система уравнений (1) имеет точное решение на границе разрыва, которое используется для аппроксимации скорости и давления на границах ячеек.

Такая модификация метода позволяет корректно моделировать возникающие ударные волны в задаче самогравитирующего газа.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 08-01-00615), Интеграционного проекта № 103, Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009 - 2013 год» (контракт П1246).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вшивков В.А., Лазарева Г.Г., Куликов И.М.* Модификация метода крупных частиц для задач гравитационной газовой динамики. // Автометрия. 2007. Т. 43., № 6. С. 56-65.
2. *Вшивков В.А., Лазарева Г.Г., Киреев С.Е., Куликов И.М.* Параллельная реализация модели газовой компоненты самогравитирующего протопланетного диска на суперЭВМ. // Вычислительные технологии. 2007. Т.12., № 3. С. 38-52.

ПРОБЛЕМА ПОЛУЧЕНИЯ ИНВАРИАНТНЫХ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ РАЗЛЕТА ГАЗОВОГО ШАРА В ВАКУУМ

Лазарева Г.Г.

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН, Новосибирск

Работа выполнена в рамках реализации федеральной целевой программы "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009 - 2013 годы, государственный контракт П1246 от 27 августа 2009 года, при поддержке грантов РФФИ № 08-01-00615-а и ИП СО РАН № 103.

В докладе рассмотрена проблема получения инвариантных относительно преобразования вращения решений в задаче разлета газового шара в вакуум в декартовых координатах для двумерного случая. Практика расчетов показывает, что неинвариантность разностных схем относительно группы преобразований, допускаемых исходной системой дифференциальных уравнений, приводит к нежелательным счетным эффектам, существенно искажающим картину изучаемого физического явления. На примере задачи разлета газового шара в вакуум показана эффективность широко применяемого метода дифференциального приближения для построения, анализа свойств и классификации разностных схем. Проведены расчеты с использованием инвариантной относительно преобразования вращения схемы, полученной с применением метода дифференциального приближения. Сравнительный анализ результатов расчетов задачи разлета газового шара в вакуум показал бесспорное преимущество использования инвариантной разностной схемы по сравнению со схемами, как первого, так и второго порядка точности. Если схемы первого порядка передают осевую симметрию решения только на чрезвычайно подробных сетках, то схемы второго порядка хорошо передают характер решения. Тем не менее, на грубых сетках решение искажается и в случае использования схемы второго порядка. Конечно, возможно модифицировать схему. При этом, наряду с существенным усложнением алгоритма, идеального результата получить невозможно. В качестве примера такой модификации приведен вариант алгоритма расчета переноса газодинамических величин в схеме крупных частиц. В отличие от рассмотренных разностных схем, схема, построенная с использованием дифференциального приближения, даже на самых грубых сетках передает осевую симметрию решения.

Таким образом, только использование инвариантной схемы, позволяет получать верные решения задачи на равномерных нединамических грубых сетках. Этот результат имеет большое значение для решения проблемы поиска эффективных численных алгоритмов моделирования фундаментальных задач астрофизики.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПРОФИЛЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ СО СТЕНКОЙ С УЧЕТОМ РЕЛАКСАЦИОННЫХ ЭФФЕКТОВ

Липницкий Ю.М., Панасенко А.В.

Центральный научно-исследовательский институт машиностроения, Королев, Московская область

При рассмотрении процессов распространения тепла считается общепринятым использование закона Фурье. Важной отличительной особенностью среды с релаксационными свойствами является необходимость учета запаздывания распространения тепла в газе [1, 2]. Это обстоятельство приводит к необходимости использования в уравнениях Навье-Стокса (в уравнении энергии) при определении удельного теплового потока q вместо закона Фурье выражение вида $q = -k\dfrac{\partial T}{\partial x} - \tau_g \dfrac{\partial q}{\partial t}$. Здесь k – коэффициент теплопроводности, T – температура, x – продольная координата, t – время, τ_g – эмпирическая константа, отражающая конечную скорость распространения теплового потока.

Проведено математическое моделирование взаимодействия профиля ударной волны с теплопроводной стенкой с учетом релаксационных эффектов в постановке [3]. Численное решение было получено на основе решение уравнений Навье-Стокса в газовой фазе и уравнения распространения тепла в твердом теле (в расчетах принимались параметры, характерные для железа). В качестве граничного условия на границе газ-стенка принималось условие равенства тепловых потоков с учетом различных коэффициентов релаксации в газовой и твердой фазах. В качестве характерных масштабов были выбраны параметры в невозмущенной газовой фазе с учетом отсутствия характерного линейного размера при формировании в ней профиля ударной волны (число Рейнольдса Re = 1).

Проведенные расчеты показывают, что влияние релаксационных эффектов приводит к изменению в характере поведения профиля температуры в твердом теле. При усилении релаксационных эффектов в нестационарном профиле температуры, за счет эффектов запаздывания

Проведенные расчеты, что наличие релаксационных свойств приводит при распространении теплового потока в твердом теле к различному виду мгновенных профилей теплового потока. Возрастание релаксационных свойств среды приводит к формированию в ней ярко выраженного теплового фронта.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 08-08-00414, Роснауки, проект 02.740.11.0204 и при использовании вычислительных ресурсов МСЦ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Лыков А.В.* Тепломассообмен. Справочник. М.: Энергия. 1978.

2. *Котляр Я.М., Совершенный В.Д., Стриженов Д.С.* Методы и задачи тепломассообмена. М.: Машиностроение. 1987. 311 с.
3. *Липницкий Ю.М., Панасенко А.В.* Формирование профиля ударной волны в газе с учетом релаксационных эффектов // Письма в ЖТФ. 2009. Т.35. Вып.21. С. 57 – 60.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТРАНСЗВУКОВЫХ ОТРЫВНЫХ ТЕЧЕНИЙ

Луцкий А.Е.
Институт прикладной метематики им. М.В.Келдыша РАН, Москва

При запуске современных космических аппаратов широко используются ракеты-носители с надкалиберными головными частями. Свойства течений около таких объектов, особенно на трансзвуковых режимах являются весьма сложными и исследованы к настоящему времени далеко не в полном объеме. В работах [1-4] представлены результаты экспериментальных исследований, выполненных в ФГУП ЦНИИМАШ. Было показано, что при трансзвуковой перестройке течения величина нестационарных аэродинамических нагрузок существенно увеличивается. В общем случае этот режим характеризуется качественными изменениями структуры течения от одного относительно устойчивого состояния к другому, наличием аэродинамического гистерезиса. При изменении числа Маха от $M \sim 0.8$ до $M \sim 1.1$ структура течения: размеры и расположение областей отрыва и внутренних сверхзвуковых областей, положение и интенсивность внутренних скачков уплотнения - существенно меняется.

Численное исследование таких течений является весьма актуальной задачей как с теоретической, так и практической точек зрения. С другой стороны, отмеченные свойства течения определяют сложность задачи численного моделирования и высокие требования к используемым алгоритмам.

Поверхность рассматриваемой модели состоит из носовой части степенной формы, которая сопряжена с цилиндрическим участком. Цилиндрический участок заканчивается обратным конусом, за которым следует кормовая цилиндрическая поверхность меньшего радиуса. Наличие указанных элементов поверхности определяют характерные особенности течения: область разрежения и возможный отрыв потока за линией сопряжения носовой и цилиндрической частей, формирование внутренней сверхзвуковой области, замыкающейся ударной волной, которая взаимодействует с пограничным слоем на цилиндрической поверхности. На линии сопряжения цилиндрической части с обратным конусом, как правило, формируется отрывная область, над которой располагается ударная волна - рис.1.

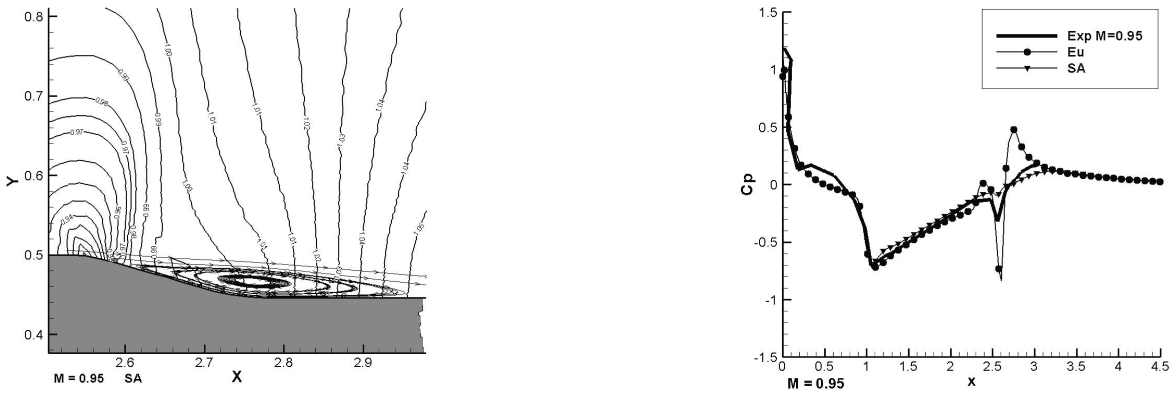


Рис. 1: M = 0.95. Изолинии давления и линии тока в области отрыва. Распределение давления на поверхности модели.

Расчеты осесимметричного обтекания модели были выполнены для чисел Маха набегающего потока M = 0.82, 0.90, 0.95, 1.1 при числах Рейнольдса $\mathbf{Re}=\mathbf{U}_\infty\mathbf{D}/\nu_\infty \sim 3*10^6$ (D - диаметр модели). В расчетах были получены основные элементы трансзвуковой перестройки течения при увеличении числа Маха набегающего потока: увеличение размеров внутренней сверхзвуковой области, безотрывное взаимодействие замыкающего скачка с турбулентным пограничным слоем, формирование отрывной области над обратным конусом. Представлено сравнение численных результатов, полученных в рамках моделей уравнений Эйлера, Навье-Стокса (нестационарное решение со спонтанными отрывами с цилиндрической части) и осредненных уравнений Рейнольдса с моделью турбулентности Спаларта-Аллмараса с экспериментальными данными [1-4]. Рассмотрены варианты модели Спаларта-Аллмараса, реализующие подход DES (метод отсоединенных вихрей) [6].

Для M=0.95, 1.1 проведено исследование обтекания под углом атаки $\alpha = 6^\circ$ - рис. 2. Расчеты выполнены в рамках простейшего варианта DES с моделью Болдуина-Ломакса вблизи тела с переходом на модель Смагоринского. Проведено сопоставление с экспериментальными данными.

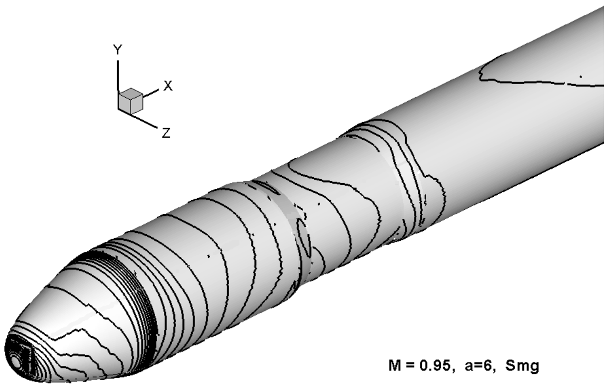


Рис. 2: M = 0.95, $\alpha = 6^\circ$. Изолинии давления на поверхности модели.

Работа выполнена при поддержке РФФИ - проект № 08-08-00356

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Даньков Б.Н., Косенко А.П., Куликов В.Н., Отменников В.Н.* Особенности трансзвукового обтекания конусоцилиндрического тела при большом угле излома образующей на передней угловой кромке // Изв. РАН. МЖГ. 2006. №2. С. 46-60.
2. *Даньков Б.Н., Косенко А.П., Куликов В.Н., Отменников В.Н.* Особенности трансзвукового обтекания конусоцилиндрического тела при малом угле излома образующей на передней угловой кромке // Изв. РАН. МЖГ. 2006. №3. С. 140-154.
3. *Даньков Б.Н., Косенко А.П., Куликов В.Н., Отменников В.Н.* Волновые возмущения в трансзвуковых отрывных течениях // Изв. РАН. МЖГ. 2006. №6. С.153-165.
4. *Даньков Б.Н., Косенко А.П., Куликов В.Н., Отменников В.Н.* Особенности трансзвукового течения за задней угловой кромкой надкалиберного конусоцилиндрического тела. // Изв. РАН. МЖГ. 2007. №3.
5. *Spalart P.R., Allmaras S.R.* A one-equation turbulence model for aerodynamic flows // La Recherche Aerospatiale. 1994; 1: 5-21
6. *M. Breuer, N. Jovicic and K. Mazaev.* Comparison of DES, RANS and LES for the separated flow around a flat plate at high incidence// Int. J. Numer. Meth. Fluids 2003; 41 p 357–388

ПРОБЛЕМА РЕМАСШТАБИРОВАНИЯ В ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧАХ МНОГОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Максимов Д.Ю., Семилетов В.А., Томин П.Ю.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Московский физико-технический институт, Долгопрудный

В работе рассматривается проблема ремасштабирования в трехмерных задачах многофазной фильтрации. Современные измерения приводят к все более точным моделям, содержащим подробные расчетные сетки. Для расчета с использованием обычных персональных компьютеров применяется процедура ремасштабирования, то есть укрупнения ячеек за счет их объединения как по вертикали, так и по латерали, при этом необходимо корректно произвести осреднение исходных параметров, заданных в ячейках.

Требования сохранения полного геометрического объема, объема коллектора и порового объема однозначно определяют в процедуре ремасштабирования методы и веса при осреднении полей песчанистости и пористости.

Осреднение абсолютной проницаемости стандартными методами основано на использовании равенства потоков стационарного уравнения однофазной фильтрации [1]. При этом следует иметь ввиду, что использование условия равенства потоков приводит к несимметричному тензору проницаемости [2]. Поэтому предлагается использовать условие равенства диссипативной энергии [3]. Для каждой грубой ячейки используются базисные функции, определенные из решения эллиптических уравнений со специальными граничными условиями первого рода. Данные функции удовлетворяют условиям на разрывах и позволяют аппроксимировать решения для ячейки грубой сетки со сложной структурой со вторым порядком. Вычисленный на линейной оболочке базисных функций интеграл энергии приравнивается разностному, построенному на основе компонент билинейной формы, аналогично методу опорных операторов. Данные компоненты билинейной формы содержат неизвестные компоненты тензора эффективной проницаемости. Получается система линейных уравнений, причем количество уравнений совпадает с количеством неизвестных, решая которую находим симметричный тензор.

Следует отметить особенность, возникающую при осреднении по латерали: эффективное значение проницаемости при объединении нескольких ячеек по двум направлениям в общем случае определяется из решения уравнений на мелкой сетке, притом что решение нестационарного уравнения с полученным таким образом коэффициентом может не описывать решение с исходным распределением [4]. Также следует учесть наличие непроницаемых зон в породе, приводящих к появлению неактивных ячеек сетки. Для объединении по латерали предложено использование метода, основанного на построении разностной схемы, которая, в свою очередь, эквивалентна некоторой электрической цепи, в которой проводимость играет роль проницаемости [5]. Отметим, что такой метод естественно учитывает распределение активных ячеек.

Объединение гидродинамически несвязных ячеек, часто возникающее при стандартном равномерном укрупнении, приводит к возможному изменению направления фильтрации, что в конечном итоге может значительно исказить характер добычи, особенно в случае совместной разработки гидродинамически несвязанных пропластков.

Предложено при вертикальном ремасштабировании рассматривать неравномерное объединение, основным критерием при котором будет ограничение на новое число слоев и объединение только активных ячеек. При независимом объединении ячеек в каждом столбце может нарушиться стыкованность сетки: нестыкованные сетки, помимо сложностей с аппроксимацией, нарушают структурированность матрицы, возникающей при линеаризации системы уравнений.

Для получения стыкованной укрупненной сетки при одновременном сохранении топологии порового пространства предложен метод на основе системы меток на вертикальных направляющих сетки. При объединении по несколько ячеек в большинстве случаев сетка получается стыкованная, а особые случаи, которые могут возникнуть при слишком грубом осреднении, исправляются изменением геометрии объединенной ячейки.

Особенностью многофазных задач является наличие относительных фазовых проницаемостей — множителей на абсолютную проницаемость в зависимости от насыщенности фазы. Это обстоятельство приводит к ряду специфических эффектов, характерных именно для многофазных задач. Примером может служить кинжальный прорыв воды по высокопроницаемому пропластку. Другой особенностью является гравитационная сегрегация из-за различия плотностей флюидов. Стандартным методом учета описанных выше особенностей является введение псевдо-функций [6]. Рассмотрены методы построения кривых эффективной относительной фазовой проницаемости, показана их применимость на тестовых и реальных задачах.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00823).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Rh. Renard, G. de Marsily*, Calculating Equivalent Permeability: a review // Advances in Water Resources, vol. 20, No 5,6, pp. 253-278, 1997.
2. *L. J. Durlofsky*, Upscaling and Gridding of Fine Scale Geological Models for Flow Simulation // 8 International Forum on Reservoir Simulation, Stresa, Italy, June 2005.
3. *A. Kh. Pergament, V. A. Semiletov, M. Yu. Zaslavsky*, Multiscale Averaging Algorithms for Flow Modeling in Heterogeneous Reservoir // Proceedings of ECMOR X, Amsterdam, The Netherlands, P014, September 2006.
4. *Д. Ю. Максимов, А. Х. Пергамент, С. Б. Попов*, Математическое моделирование однофазной фильтрации в случайно неоднородных средах // Препринт ИПМ № 38, Москва, 2002.
5. *P. R. King, A. H. Muggeridge, W. G. Price*, Renormalization calculations of immiscible flow // Transport in porous media, N 12, pp. 237–260, 1993.
6. *H. L. Stone*, Rigorous black-oil pseudofunctions // Paper SPE 21207 presented at SPE Symposium on Reservoir Simulation, Anaheim, California, February 1991.

МНОГОСЕТОЧНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ОДНОФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Максимов Д. Ю., Филатов М. А.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

В работе исследуются вопросы обобщения и применимости геометрических многосеточных методов к нелинейным задачам.

В качестве такой задачи для исследования была выбрана задача однофазной фильтрации газа, включающая зависимости пористости, вязкости, плотности от давления, а также наличие источников и стоков. Существенная нелинейность обусловливается большей сжимаемостью газовой фазы по сравнению с нефтяной и водяной фазами. В качестве основного метода, с которым производится сравнение по точности и времени расчета, выбраны стандартный метод Ньютона и метод бисопряженных градиентов для решения получаемой системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Рассмотрены варианты применения многосеточного метода (называемого также методом мультигрид) к нелинейной задаче. Это, во-первых, расщепление на метод Ньютона и решение СЛАУ методом мультигрида на каждом шаге нелинейных итераций, во-вторых, модификация мультигрида для учета нелинейности уравнения [1], такая что согласования внутренних и внешних итераций не требуется.

В первом случае рассмотрена эффективность стандартных V-циклов и W-циклов многосеточного метода, а также полный многосеточный метод (Full Multi-Grid, FMG) [2]. Второй подход состоит в прямом использовании метода многосеточных итераций для решения нелинейных задач. Аналогом V-цикла в этом случае будет схема полной аппроксимации (Full Approximation Scheme, FAS), в которой по сравнению с линейным случаем появляются существенные различия в сглаживания и коррекции решения. В качестве сглаживания использован нелинейный метод Гаусса-Зейделя. Как обобщение полного линейного многосеточного метода, рассмотрен нелинейный аналог метода FMG. В результате получено, что наибольшее ускорение при одинаковой точности дал полный многосеточный метод (FMG), примененный к линеаризованной задаче, которому несколько уступает по скорости нелинейный FMG, притом что в целом эти методы превзошли основной метод.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00823).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Е. Н. Станкова, М. А. Затевахин*, Многосеточные методы. Введение в стандартные методы. 2003. — http://www.csa.ru/~stan/multigrid/index.html

2. *Ю. В. Василевский, М. А. Ольшанский*, Краткий курс по многосеточным методам и методам декомпозиции области. М.: Изд-во МГУ, 2007.

АСИММЕТРИЧНОЕ ОБТЕКАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ

Максимов Ф.А.

Институт автоматизации проектирования РАН, Москва

В докладе приведены результаты численного моделирования сверхзвуковых течений вязкого газа около тел с головной частью в виде острого конуса. Рассмотрены три геометрии: конус + цилиндр; конус с донным срезом; конус + цилиндр с расположением аэродинамических поверхностей в кормовой части. Решение получается методом установления на основе уравнений Навье-Стокса в приближении тонкого слоя. Разработаны способы построения пространственных сеток, общей особенностью которых является выделение координатного направления ориентированного по нормали к поверхности тела, и сгущение узлов к поверхности тела. Течение моделируется в условиях, когда около головной части образуется симметричная и асимметричная картины вихревого течения. Рассматривается развитие вихревой системы вниз по потоку, получена оценка аэродинамических сил и моментов в условиях симметричного и асимметричного обтекания.

Расчеты проводились с использованием многопроцессорной вычислительной системы. Приводятся полученные оценки эффективности параллельных вычислений. Обсуждаются вопросы ускорения вычислений и перспективы математического моделирования при использовании многопроцессорных компьютеров.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект №09-01-00296-а). Расчеты проводились на МВС-100К МСЦ РАН.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ПРОБЛЕМЕ ДОБЫЧИ ВЫСОКОВЯЗКИХ НЕФТЕЙ

Митрушкин Д. А.

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва

Работа посвящена математическому моделированию разработки месторождений высоковязких нефтей посредством закачки теплоносителя (горячей воды или пара) в пласт. Рассматривается неизотермическая трехфазная (нефть, вода, пар) модель фильтрации. Предложена разностная схема, основанная на методе конечных объемов. Особенность данной задачи — существенная зависимость свойств флюидов от температуры. Наиболее существенным моментом является резкое уменьшение вязкости нефти с ростом температуры. Как следствие, необходимо достаточно точно определять поле температуры вблизи тепловых источников. Для решения этой задачи предложен алгоритм локального измельчения сетки в окрестности скважины, позволяющий корректно разрешать возникающие фронты фазового перехода. Важным результатом является построение автомодельных решений задачи об инжекции пара и задачи о стационарном течении трехфазного флюида в поле силы тяжести. Представлены результаты тестирования построенной разностной схемы на полученных автомодельных решениях, а также результаты расчета теплового фронта вблизи скважины на различных разностных сетках.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-01-00823).

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПАССИВНОГО МАССОПЕРЕНОСА В РУСЛОВЫХ ПОТОКАХ НА ОСНОВЕ РЕДУЦИРОВАННЫХ ТРЕХМЕРНЫХ МОДЕЛЕЙ

Надолин К.А.

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

В докладе рассматриваются модельные уравнения, которые описывают течение в русловых потоках как пространственно трехмерный процесс, при этом они существенно проще полных трехмерных уравнений, а в некоторых случаях – и двумерных.

Построение упрощенных математических моделей основано на применении метода малого параметра к уравнениям Рейнольдса для несжимаемой жидкости, замкнутых на основе гипотезы Буссинеска, и к уравнению конвективной диффузии, описывающему пассивный перенос распадающегося вещества в движущейся среде [1]. В отличие от осредненных уравнений, рассматриваемые модели учитывают пространственную структуру течения, что позволяет исследовать влияние формы дна и береговой линии русла, а также некоторых внешних факторов (например, воздействие ветра) на особенности течения и, соответственно, массопереноса.

Обсуждаются особенности начально-краевых задач редуцированных моделей для потоков разных типов (мелкий и протяженный, очень мелкий и протяженный, мелкий и сильно протяженный, мелкий и широкий, глубокий и протяженный) и перспективы распараллеливания алгоритмов для их численного решения.

В качестве примера рассмотрено численное решение уравнений редуцированной модели пассивного массопереноса в мелком и широком или очень мелком и протяженный русловом потоке малой мутности при постоянной вязкости. Вычислительная схема сочетает метод Галеркина и сеточный метод характеристик для системы линейных уравнений гиперболического типа. Используемый подход оказывается хорошо приспособленным к особенностям задачи и достаточно простым в реализации как для явной, так и для неявной конечно-разностной схемы.

Работа выполнена при финансовой поддержке АВЦП МО РФ "Развитие научного потенциала высшей школы (2009-2010 годы)"

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Надолин К. А.* Об одном подходе к моделированию пассивного массопереноса в русловых потоках // Математическое моделирование. 2009. Т. 21, N. 2. С. 14–28.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ ВЕКТОРНЫМ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ИЕРАРХИЧЕСКИХ БАЗИСАХ ВЫСОКИХ ПОРЯДКОВ

Нечаев О.В., Шурина Э.П.

Новосибирский государственный технический университет, Новосибирск
Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН, Новосибирск

В квазистационарном режиме (гармоническая зависимость от времени) система уравнений Максвелла приводится к векторному уравнению Гельмгольца относительно комплекснозначных функций: напряженности электрического или магнитного полей. Необходимость решения уравнения Гельмгольца возникает во многих приложениях: неразрушающий кнтроль, геоэлектрика, оптоэлектроника. Для этих классов задач характерна геометрическая и физическая неоднородность фрагментов области моделирования, широкий диапазон частот от десятков герц до террагерц. Кроме того в таких приложениях, как геоэлектрика, индукционный каротаж, свойства сред таковы, что в рабочих диапазонах частот, токи проводимости и токи смещения соизмеримы. При реализации вычислительных схем на базе векторного метода конечных элементов [1] необходимо решить следующие проблемы: 1) оптимальный выбор векторных базисных функций на симплициальных сетках; 2) эффективный, устойчивый, допускающий распараллеливание алгоритм решения дискретной конечноэлементной системы уравнений. Целью данной работы является анализ векторных базисных функций на симплициальном неструктурированном разбиении первого и второго типов в в зависимости от класса решаемых задач и построение мультипликативного двухуровневого метода решения системы конечноэлементных уравнений. Структура матрицы конечноэлементной системы уравнений определяется порядком векторных базисных функций, т.к. степени свободы на высоких порядках ассоциированы с ребрами, гранями и тетраэдрами. Вычислительные схемы, построенные на иерархических полного порядка векторных базисных функциях, позволяет правильно учитывать нетривиальное ядро дискретного $rot-$оператора.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 09-05-00702

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Monk P.* Finite Element Methods for Maxwell's Equations. Oxford University Press 2003.

О ЗАДАЧЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ИДЕНТИФИКАЦИИ АВТОРА ТЕКСТА

Орлов Ю.Н.[1], Осминин К.П.[2], Феодоритова О.Б.[1]
[1]*ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, Москва*
[2]*Мехмат МГУ им. М.В. Ломоносова, Москва*

Рассматривается задача классификации литературных текстов на основе анализа статистических закономерностей буквенных распределений, т.е. вероятностей встречаемости букв и буквосочетаний. Развиваемый подход [1] включает расчеты ε-спектров [2] и границ хаусдорфовых множеств матриц условных вероятностей и позволяет с высокой точностью идентифицировать автора и жанр литературного произведения.

Рассматрим литературный текст как на русском языке. Учитываются только буквы алфавита, "ё"учитывается как "е". Не учитываются пробелы, знаки препинания, переносы, символы новых строк, цифры, буквы не русского алфавита и т.п. Получается временной ряд со значением в 32 буквах алфавита. Времени отвечает очередность появления буквы в тексте.

Обозначим через $K(t)$ вектор вероятностей, i-ая компонента которого равна вероятности того, что в момент времени $t{+}1$ в тексте реализуется буква i. Для каждого натурального сдвига l строится матрица условных вероятностей $P(l,t)$, элементы которой определяются по формуле:

$$p_{ij}(l)(t) = P\left(\xi(t+l) = j | \xi(t) = i\right), \quad i, j \in \{\text{а,..,я}\}. \tag{1}$$

Получены основные свойства матрицы (1):
Свойство 1. $\sum_j p_{ij}(l)(t) = 1 \;\; \forall i, \; l.$

Свойство 2. $K(t+l) = P(l,t) \cdot K(t) \;\; \forall l, t.$

Пусть K и $P(l)$соответственно – средние по времени значения величин $K(t)$ и $P(l,t)$. Тогда справедливо

Свойство 3: K есть собственный вектор для всех операторов $P(l)$ с собственным значением 1.

Итак, пусть вектор $\hat{K}$ есть распределение букв исходного текста, а матрицы $\hat{P}(l)$ есть выборочные матрицы условных переходов на l букв вперед. Обозначим через T мощность множества $\{x(t)\}$. Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1: $\hat{P}(l)\ \hat{K} = \hat{K} + O(l/T) \quad \forall l.$

Утверждение 2: Подпространство $L = \left\{y \in R^{32} : \sum y_i = 0\right\}$ является собственным для операторов $\hat{P}(l)$.

Высказана гипотеза (нашедшая подтверждение), что спектральный портрет матриц перехода характерен для каждого автора. Однако спектр матриц, элементы которых определены с ошибкой, занимает некоторую область на комплексной плоскости, а не является совокупностью определенных чисел.

На рис. 1-2 показаны спектры и ε-спектры типичных матриц перехода $\hat{P}(l)$. Точками отмечены собственные значения матриц, цветовые области предсталяют ε-спектры, в которых находятся собственные значения матриц при разном уровне точности задания элементов матриц. Так, красная область отвечает спектру при точности определения матриц с ошибкой $\varepsilon = 10^{-1}$. Синяя область отвечает спектру при ошибке элементов матрицы порядка $\varepsilon = 10^{-5}$.

На рис. 3 показаны границы хаусдорфовых множеств 10-ти матриц. Напомним, что совокупность всех значений $(Au, u)/(u, u)(u \neq 0)$ называется областью значений или хаусдорфовым множеством квадратной матрицы A [2]. Этот инстрмент представляется полезным для задачи идентифмкации текстов. Что касается спектральных портретов матриц перехода, то помимо того, что они весьма характерны для каждого автора, одновременно получается такая важная характеристика, как допустимая неточность воспроизведения текста.

Описанный метод представляется перспективным для решения задачи определения автора и жанра литературного произведения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Орлов Ю.Н., Осминин К.П.* Определение жанра и автора литературного произведения статистическими методами // Прикладная информатика, 2010. Т. 26. № 2. С. 95-108.
2. Годунов С.К. Современные аспекты линейной алгебры.– Новосибирск, Научная книга, 1997, С.390.

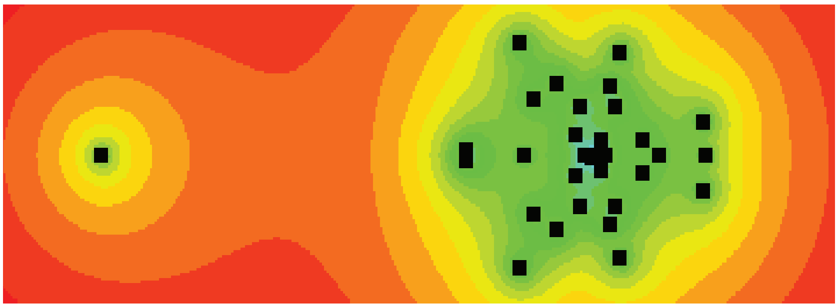


Рис. 1. Центральная часть спектра $\hat{P}(1)$ в области $[-0.6, 0.2] \times [-0.15, 0.15]$

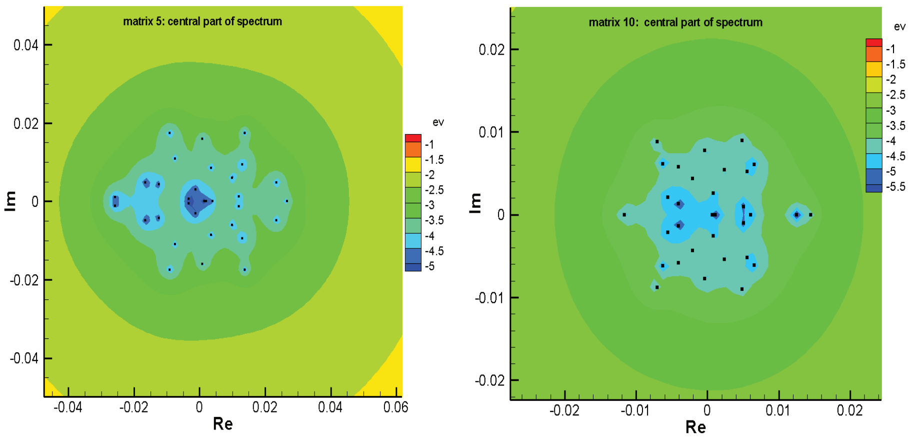


Рис. 2. Центральная часть спектра матриц $\hat{P}(5)$ (слева) и $\hat{P}(10)$ (справа)

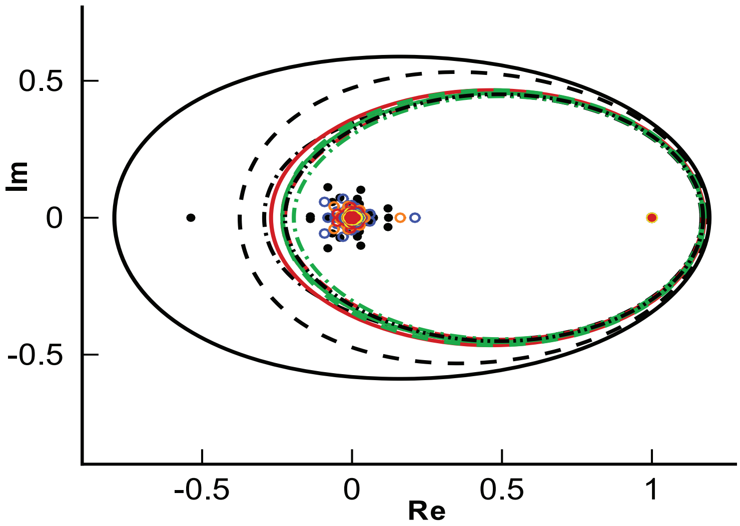


Рис. 3. Хаусдорфовы множества 10-ти матриц

КОМПЛЕКСНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛОВОГО И НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МНОГОСЛОЙНЫХ КОМПОЗИТНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ МНОГОФАКТОРНОМ ТЕРМОСИЛОВОМ НАГРУЖЕНИИ

Осяев О.Г.

Ростовский военный институт ракетных войск, Ростов-на-Дону

В настоящее время все большее применение находят многослойные полимерные композитные конструкции, для которых проблема прогнозирования прочности, в условиях многофакторных воздействий внешней среды, включая экстремальные нагрузки, требует разработки специальных комплексных моделей теплового и напряженно-деформированного состояния.

Предлагаемая модель позволяет численно определять энергопоглощение, поля температур, напряжений, перемещений и деформаций в многослойных композитных цилиндрических оболочках при различных пространственно-временных законах распределения объемных тепловых источников и механических сил. Рассматривается оболочка из вязкоупругих анизотропных слоев в криволинейной ортогональной системе координат, наряду с которой введена локальная система, связанная с каждым слоем. Для каждого слоя справедлива система уравнений, полученная на основе классической системы нелинейных уравнений теории упругости [1], в предположении геометрической линейности деформаций относительно перемещений и физической нелинейности материала, обусловленной реологическими свойствами конструкционных полимеров. Граничные условия соответствуют идеальному тепловому и механическому контакту слоев. Начальные условия выражены через перемещения и их первые производные по времени, соответствующие предварительному нагружению. Разрешающая система уравнений составлена относительно функций распределения нагрузок, напряжений и перемещений по толщине, через которые заданы условия контакта слоев. Для разделения переменных используются разложения указанных функций в двойные тригонометрические ряды Фурье и в конечные разности по времени [2]. Расчет осуществляется численными методами с использованием дискретной ортогонализации и прогонки по толщине.

Тестовые расчеты показали высокую точность полученных результатов, адекватность расчетной модели, удобство формализации исходных данных и интерпретации результатов расчета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Новожилов В.В.* Основы нелинейной теории упругости. М.: - Л.: Гостехиздат, 1984.- 212 с.
2. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т., Панкратова Н.Д.* Статика анизотропных толстостенных оболочек. Киев.: Вища школа, 1985. - 190 с.

ЛОКАЛИЗАЦИЯ СТРУКТУР В ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПОЛЯХ. ВЕЙВЛЕТНЫЙ АНАЛИЗ

Пленкин А.В.

Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Москва

Для расчета газодинамических течений широко используются методы сквозного счета. Однако размазывание разрывов, может негативно сказываться на качестве расчета. Кроме того, часто именно положение ударных волн в течении представляет специальный интерес. Отсюда возникает обратная задача - локализовать и классифицировать разрывы в поле, полученном в расчете.

В ходе исследования этой задачи был построен детектор сингулярностей [1] на основе вейвлет анализа. В качестве исходных данных детектор использует результаты расчета газодинамических полей. В результате работы алгоритма каждому узлу сетки присваивается число, которое характеризует течение в окрестности этого узла.

Дополнительная обработка исходного поля средствами кратномасштабного вейвлет анализа позволяет выявить среди выделенных детектором разрывов структуры, соответствующие чисто счетным эффектам, и тем самым избавиться от части артефактов [2].

Дальнейшие исследования [3] показали, что детектор может быть использован для выделения локализованных структур в течениях, найденных численно на основании модели Навье-Стокса. При этом для тех структур, которым в идеальной жидкости соответствуют ударные волны, при больших числах Рейнольдса с высокой точностью выполняются соотношения Гюгонио. Также детектор позволяет локализовать границу пограничного слоя и следа за моделью в расчетах обтекания тела.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ 08-01-00454-а и 08-08-00356.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афендиков А.Л., Левкович-Маслюк Л.И., Луцкий А.Е., Пленкин А.В.* Локализация разрывов в полях газодинамических функций с помощью вейвлет анализа. // Математическое моделирование 2008. Т. 20. N. 7. С. 65–84.
2. *Афендиков А.Л., Луцкий А.Е., Пленкин А.В.* Многомасштабный анализ особенностей газодинамических полей. // Препринт института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН 2008. N. 98.
3. *Афендиков А.Л., Луцкий А.Е., Пленкин А.В.* Локализованные структуры в идеальной и вязкой моделях. Вейвлетный анализ. // Препринт института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН 2009. N. 78.

МОДЕЛИРОВАНИЕ БОЛЬШИХ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

Пешков И.М.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

В работе рассматривается вопрос вычислительного моделирования больших упругих и упругопластических деформаций твердых тел. Для этого построена математическая модель твердого тела в виде законов сохранения в лагранжевых переменных [1, 2]. Для описания пластических деформаций используется подход максвелловских вязкостей. В этом случае естественным образом возникает разложение тензора реальной дисторсии C в произведение тензора эффективной упругой дисторсии E на пластический тензор P: $C = EP$. Элементы c_{ij} тензор реальной дисторсии C вычисляется как $c_{ij} = \partial x_i/\partial \xi_j$, где x_i, ξ_j – эйлеровы и лагранжевы координаты точек среды соответственно.

В таком описании тензор пластической дисторсии P описывает накопление дефектов (дислокаций) в среде при пластических деформациях. При этом подразумевается, что при разгрузке элементарный объем среды возвращается в ненапряженное состояние характеризуемое тензором E^{-1}, а не C^{-1}. Другими словами, в среде остаются, так называемые, остаточные деформации, определяемые пластическим тензором P. Однако в целом среда не разгружается в состояние E^{-1} из-за наличия остаточных напряжений, который в этой модели получаются автоматически.

В докладе также будет показано как используемые подходу могут быть применены для моделирования анизотропных упругопластических сред. Качественное поведение модели демонстрируется на ряде численных примеров.

Работа выполнена при поддержке гранта президента Российской Федерации “Ведущие научные школы” НШ-4242.2010.1 и заказного междисциплинарного проекта №40 (тема Д6 220409) Президиума СО РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Годунов С. К., Пешков И. М.* Симметрические гиперболические уравнения нелинейной теории упругости // Журн. вычислит. математики и мат. физики. 2008. Т. 48. N. 6. С. 1034–1055.
2. *Пешков И. М.* Численное моделирование разрывных решений в нелинейной теории упругости // ПМТФ. 2009. Т. 5. С. 152–161.

ИНДЕКСНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ПРИ ОБРАБОТКЕ РЕГИОНАЛЬНЫХ СПУТНИКОВЫХ ДАННЫХ

Повх В.И., Шляхова Л.А.

Ростовский государственный университет путей сообщения, ЮРИА-Центр

Данные многоспектрального космического зондирования позволяют получать информацию о биохимических процессах для разных типов растительности, что является важной составной частью исследований нормального и стрессового состояния соответствующих сообществ, циклов нитратных соединений, биологической продуктивности. Растительность в здоровом и стрессовом состоянии имеет разные особенности отражательной способности в зеленой области спектра и в области максимума отражения в красной области спектра вследствие различий в содержании пигментов листвы. Хлорофиллы - основные из этих пигментов. Простейшим подходом к анализу данных многоспектрального зондирования считается нахождение статистических связей между наземными измерениями биохимического состава выбранных образцов растительности и спектральной отражательной способности растительного полога. Однако полученные результаты нахождения связей применимы только для конкретных участков измерений.

Более широкие приложения получили исследования по поиску эмпирических связей между вегетационными индексами (различными комбинациями измерительных данных дистанционного зондирования) и содержанием хлорофилла для разных типов растительного покрова. В большинстве случаев эти индексы чувствительны к содержанию хлорофилла в листьях растений. Математической основой приложений индексного приближения служат модели взаимодействия солнечного излучения с отдельными фитоэлементами и всем растительным пологом, что способствуют уточнению используемых вегетационных индексов при рассмотрению геометрии солнечного освещения растительных объектов и визирования соответствующих объектов из космоса.

В работе приводятся некоторые примеры реализации индексного приближения для оценки состояния зерновых сельскохозяйственных культур после перезимовки по данным многоспектрального космического зондирования для Юга России.

ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ ДЛЯ ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В УПРУГОЙ ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Роменский Е.И.

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

Предлагается новая формулировка определяющих уравнений для течения сжимаемой жидкости сквозь упругий скелет. Дивергентная форма предложенных уравнений обеспечивает успешное применение высокоточных численных методов для исследования разнообразных прикладных задач, в частности, для изучения ударно-волновых процессов.

Традиционно используемая при описании распространения волн в насыщенных пористых средах модель Био [1], представляют собой систему линейных уравнений второго порядка для перемещений в упругой матрице и в жидкости. Подход Био обладает рядом недостатков, в частности отсутствием связи с законами термодинамики.

Предлагаемый в докладе вывод уравнений для насыщенных пористых сред на основе формализма термодинамически согласованных систем [2] приводит к системе, все уравнения которой имеют дивергентный вид и образуют симметрическую гиперболическую систему. Такая методика успешно применялась при выводе уравнений двухфазных сжимаемых течений [3]. Рассмотрен линеаризованный вариант сформулированных уравнений для описания волн малой амплитуды, который может быть использован в задачах сейсмики и акустического каротажа скважин. Исследована зависимость скоростей распространения волн от объемного соотношения фаз.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 09-05-00221,10-05-00233), Программы Президиума РАН (проект №2),

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Biot M.A.* Theory of propagation of elastic waves in a fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range // J. Acoust. Soc. Am. 1956. V. 28. N. 2. P. 168–178.
2. *Годунов С.К., Роменский Е.И.* Элементы механики сплошных сред и законы сохранения. Новосибирск: Научная Книга, 1998.
3. *Romenski E., Drikakis D., Toro E.F.* Conservative models and numerical methods for compressible two-phase flow. J. Sci. Comput. 2010. V. 42. N. 1. P. 68–95.

ВИЗУАЛЬНОЕ ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ ФИЗИКИ ВЗРЫВА И УДАРА НА СОВРЕМЕННЫХ КОМПЬЮТЕРАХ

Руденко В.В., Башуров В.В., Павлов С.В., Шабуров В.М., Шабуров М.В.
РФЯЦ-ВНИИЭФ, Саров

Комплекс MASTER Professional предназначен для проведения расчетно-теоретического моделирования быстропротекающих нестационарных многомерных импульсных газо-, гидродинамических, упругопластических, сопровождающихся звуковыми, ударными, детонационными волнами, высокими сжатиями и удельными энергиями изучаемых сред.

В состав комплекса включены различные численные алгоритмы, позволяющие моделировать реальные физические эксперименты с использованием численных методов как в одномерном, так и в многомерном приближении.

Отличительными особенностями комплекса являются простота, развитый дружественный пользовательский интерфейс, высокая степень автоматизации и визуализация всех этапов работы пользователя, визуализация моделируемых процессов и удобные средства управления моделированием и обработки результатов.

Основу архитектуры комплекса MASTER составляют:

- база данных методов численного моделирования, содержащая счетные модули для численного моделирования процессов физики сплошных сред;
- 2D и 3D визуальный графический редактор для задания геометрии задачи;
- интерфейсная система ввода начальных данных и граничных условий задач;
- система задания начальных данных сложных объектов (серий, вариаций, оптимизаций и др.);
- система управления расчетами объектов;
- система визуализации данных на всех этапах жизненного цикла объектов;
- мастер подготовки объектов - система задания начальных данных объектов на основе последовательности диалогов для ускоренной подготовки;
- система обработки результатов;
- база данных характеристик материалов, включающая параметры уравнений состояния, параметры упругопластических моделей и теплофизические параметры материалов;
- система помощи (Help) на русском и английском языках.

Работа пользователя происходит в уникальной интерфейсной среде, обладающей современными средствами ввода данных, в том числе 2D и 3D геометрий.

Развитые средства управления расчетами составляют основу виртуальной лаборатории, предназначенной для численного моделирования задач различных классов. Виртуальная лаборатория создана в виде пользовательской визуальной диалоговой среды для подготовки, проведения расчетов и обработки результатов исследовательских задач (виртуальных экспериментов).

В состав лаборатории входит база данных характеристик веществ, которая используется при подготовке расчета и включает:

- библиотеку уравнений состояния;
- библиотеку упругопластических моделей;
- библиотеку теплофизических параметров.

При проектировании и расчетно-теоретической отработке ракетно-артиллерийских вооружений в комплексе MASTER решаются следующие задачи физики взрыва и удара:

- задачи проникания, бронепробития;
- детонационных и взрывных процессов;
- кумулятивных явлений.

Комплекс предназначен для персональных компьютеров с операционными системами Windows-NT, 2000, XP, Vista и выше со стандартной конфигурацией. Работает на многопроцессорных (многоядерных) компьютерах, эксплуатируется в сетевом и персональном вариантах, защищен от нелицензионного использования программируемым электронным ключом. Комплекс зарегистрирован в Общероссийском Фонде Алгоритмов и Программ (рег. № 11845).

ИССЛЕДОВАНИЕ ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИК МАТЕРИАЛОВ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИЗМЕРЕНИЙ ЭЛЕКТРОННОЙ МИКРОСКОПИИ

Савелова Т.И.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва

Проведено численное исследование точности вычисления характеристик материалов ядерными и проекционными методами, получены аналитические оценки точности. Показано влияние погрешности измерений на результат вычислений.

Методы электронной микроскопии активно используются при изучении физических свойств материалов, позволяют получать до 10^7 отдельных ориентировок зерен материала. В последние годы развитие технических возможностей электронной микроскопии опережают развитие математического аппарата по обработке экспериментальных данных.

Данная работа посвящена ядерным и проекционным методам определения основных характеристик материалов (функции распределения ориентаций и полюсных фигур) по данным измерений электронной микроскопии [1-2]. В работе рассматривались вопросы точности вычислений в зависимости от числовых значений параметров задачи, были получены аналитические и численные оценки [3]. Для проведения исследований математически моделировались данные эксперимента - ориентации отдельных зерен, с помощью специализированного метода [4].

В результате численных экспериментов была показана зависимость точности вычислений от различных параметров задачи: объема выборки, параметра распределений. Показано влияние погрешности определения отдельных ориентировок на результат восстановления функции распределения ориентаций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Савелова Т.И., Сыпченко М.В.* Вычисление функции распределения ориентаций по набору отдельных ориентировок на группе вращений SO(3) / Журнал вычислительной математики и математической физики, №6 (2007), т. 47, с. 970 - 982.
2. *Савелова Т.И., Сыпченко М.В.* Оценка точности ядерных методов для зависимых ориентаций и с учетом размеров зерен для восстановления функции распределения зерен по ориентациям на группе SO(3) / Журнал вычислительной математики и математической физики, 2009, т. 49, №5, с. 1 - 11.
3. *Аганин К.П., Савелова Т.И.* Оценки точности ядерных и проекционных методов восстановления функции распределения ориентаций на группе вращений SO(3). / Журнал вычислит. матем. и матем. физ., 2008, №6, с. 1087 - 1101.
4. *Borovkov M. and Savyolova T.* The Computational Approaches to Calculate Normal Distributions on the Rotation Group. / J. Appl. Cryst., 2007, v. 40, p. 449 - 455.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АКУСТИКИ ПУЧКОВ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ И ЕЕ ПАРАЛЛЕЛЬНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ

Савицкий О.А., Чистяков А.Е.
ТТИ ЮФУ, Таганрог

Нелинейные эффекты, сопровождающие распространение волн конечной амплитуды в виде звуковых пучков имеют многочисленные приложения в гидроакустике, медицине, неразрушающем контроле. Вместе с тем, в силу сложности нелинейных процессов в бездисперсионных средах, протекающих с одновременным участием дифракции и диссипации, отсутствуют практически значимые решения основного уравнения акустики пучков конечной амплитуды, которые могли бы лечь в основу инженерных методик расчета параметров тех или иных устройств, принцип действия которых основан на использовании нелинейных эффектов. Использование численных методов и математического моделирования остается пожалуй единственной возможностью прикладных инженерных расчетов при проектировании приборов и устройств нелинейной акустики и ультразвука высокой интенсивности.

К сожалению в России до настоящего времени не существует доступных специализированных программ для расчетов акустических полей волн конечной амплитуды. Разработанный в МГУ им. М.В.Ломоносова пакет прикладных программ используется в основном в исследовательских целях группой ученых кафедры акустики физического факультета Московского университета.

В Технологическом институте Южного федерального университета разработана дискретная математическая модель и программно-алгоритмическая реализация, на высокопроизводительных вычислительных системах, допускающая ее применение для инженерных расчетов акустических полей большой амплитуды. В работе приводятся основные параметры модели, анализируются возможные пути распараллеливания вычислений.

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ТРЕФФЦА — КУФАРЕВА АНАЛИТИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В ПОЛИГОНАЛЬНЫХ ОБЛАСТЯХ

Скороходов С.Л.
ВЦ РАН, Москва

Пусть в односвязной полигональной области $\mathcal{G}$ с углами $\pi\beta_k$ в вершинах z_k, $k = 1, \ldots, N$, расположенной на комплексной плоскости $z = x + iy$, рассматривается задача Дирихле

$$\Delta\varphi(z) = f_M(x, y), \qquad z \in \mathcal{G}\,; \qquad\qquad \varphi(z) = h_K(x, y), \qquad z \in \partial\mathcal{G}\,, \qquad (1)$$

где $f_M(x, y)$ и $h_K(x, y)$ — полиномы от x и y соответственно степеней M и K; решение $\varphi(z) \in C^2(\mathcal{G}) \cap C(\overline{\mathcal{G}})$.

Вычитая частное решение задачи (1), сводим ее к нахождению гармонической функции $\psi(z)$ с полиномиальными граничными значениями степени $L = \max(M + 2, K)$. Вводя комплексификацию функции $\psi(z)$, т.е. аналитическую функцию $\Psi(z)$, $\mathrm{Im}[\Psi(z)] = \psi(z)$, убеждаемся, что ее L–я производная $\Psi^{(L)}(z) =: \mathcal{F}(z)$ осуществляет конформное отображение исходной полигональной области $\mathcal{G}$ на некоторую, также полигональную и, возможно, неоднолистную область $\mathcal{D}$, при котором вершины z_k многоугольника $\mathcal{G}$ с углами $\pi\beta_k$ переходят в вершины w_k многоугольника $\mathcal{D}$ с углами $\pi\gamma_k$, где $\gamma_k = 1 - L\beta_k$.

Отображение $\mathcal{F} : \mathcal{G} \xrightarrow{conf} \mathcal{D}$ можно записать как суперпозицию отображений верхней полуплоскости $\mathbf{H}$ на области $\mathcal{G}$ и $\mathcal{D}$, т.е. $\mathcal{F}(z) = f_2(\zeta) \circ f_1^{-1}(z)$, где

$f_1 : \mathbf{H} \xrightarrow{conf} \mathcal{G}$ представляется в виде интеграла Кристоффеля — Шварца

$$z = f_1(\zeta) = \mathcal{K} \int^{\zeta} \prod_{k=1}^{N} (\zeta - \zeta_k)^{\beta_k - 1} \, d\zeta \,, \tag{2}$$

а $f_2 : \mathbf{H} \xrightarrow{conf} \mathcal{D}$ — в виде обобщенного интеграла Кристоффеля — Шварца

$$w = f_2(\zeta) = \int^{\zeta} R_T(\zeta) \prod_{k=1}^{N} (\zeta - \zeta_k)^{\gamma_k - 1} \, d\zeta \,; \tag{3}$$

здесь $R_T(\zeta)$ — полином степени $T = LN - 2L - 2$ с вещественными коэффициентами, который находится из условий, возникающих при переходе от φ к $\mathcal{F}$. Такой метод был предложен О.Треффцем [1] и получил дальнейшее развитие в работе П.П.Куфарева [2], а также в статьях [3]-[7].

В работе [3] этим методом была решена задача (1) при $f_0 = -2$ и $h_0 = 0$ в L–образной области с полками произвольной длины и произвольным значением входящего угла между ними. Эта задача в теории упругости соответствует проблеме кручения упругого призматического стержня с L–образным сечением. Важным результатом, полученным в работах [3]-[7], является величина a_1 коэффициента интенсивности в вершине входящего угла. Для случая входящего угла раствора $3\pi/2$ и бесконечных полок было найдено

$$a_{_1} = \frac{9\,\mathrm{G}}{\pi} \left(\frac{4}{3\pi}\right)^{^{4/3}} = 0.83693221...,$$

где $\mathrm{G} = 1 - 3^{^{-2}} + 5^{^{-2}} - \ldots$ — постоянная Каталана. Это позволило исправить ошибочное значение $a_1 = 1.48$, приведенное в работе О.Треффца [1].

В работах [4], [5] этот метод был применен к аналогичной задаче в T-образной, крестообразной и рамообразной области.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (Проект №10-01-00837) и Программы №3 ОМН РАН.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Trefftz E.* Über die Torsion prismatischer Stäbe von polygonalem Querschnitt // Math. Ann. 1921. Band 82. Heft 1/2. С. 97–112.
2. *Куфарев П.П.* К вопросу о кручении и изгибе стержней полигонального сечения // Прикл. матем. и механ. 1937. Т. 1. N. 1. С. 43–76.
3. *Власов В.И., Скороходов С.Л.* Аналитическое решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в одном классе полигональных областей. Сообщения по прикладной математике. М.: ВЦ АН СССР, 1988. 38 с.
4. *Скороходов С.Л.* Аналитическое решение задачи Дирихле для T–образной и крестообразной областей. Аналитические и численные методы решения задач математической физики. М.: ВЦ АН СССР, 1989. С. 58–70.

5. *Скороходов С.Л.* Аналитическое решение задачи Дирихле для одного класса двусвязных областей. Сообщения по прикладной математике. М.: ВЦ АН СССР, 1990. 29 с.
6. *Власов В.И., Скороходов С.Л.* О развитии метода Треффца // Доклады РАН. 1994. Т. 337. N. 6. С. 713–717.
7. *Vlasov V.I., Skorokhodov S.L.* A generalization and development of the Trefftz's method // ZAMM. 1996. V. 76. Suppl. 1. С. 547–548.

МАСШТАБИРУЕМЫЙ ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОТЕНЦИАЛА ИЗОЛИРОВАННЫХ СИСТЕМ

Снытников Н.В.

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск

При решении некоторых задач астрофизики необходимо вычислять трехмерный гравитационный потенциал изолированной системы, т.е. для которой поставлена задача Дирихле:

$$\Delta\Phi(\mathbf{r}) = 4\pi G\rho(\mathbf{r}), \Phi(\mathbf{r})|_{|\mathbf{r}|\to\infty} = 0, \tag{1}$$

где G – гравитационная постоянная, $\rho(\mathbf{r})$ – плотность. Основной трудностью создания параллельного алгоритма решения этой задачи (способного работать с сетками с числом узлов больше 256^3) на основе декомпозиции области и использования существующих «последовательных» методов решения (например, быстрого преобразования Фурье или многосеточного метода) является необходимость пересылок трехмерных массивов с данными между процессорами, что является очень трудоемкой процедурой для современных суперЭВМ. Дополнительную сложность вносит также необходимость постановки краевых условий на потенциал на границе конечной расчетной области.

К настоящему моменту известны масштабируемые параллельные алгоритмы решения задачи (1) в декартовых координатах ([1, 2]). В данной работе представлен соответствующий алгоритм для цилиндрических координат, применение которых оправдано для моделирования динамики спиральных галактик и протопланетных дисков.

Алгоритм основан на декомпозиции области по радиальной координате и разбиении потенциала на близкодействующий часть (вычисляется независимо для каждой подобласти на подробной сетке с помощью метода [3] и метода свертки для постановки краевых условий на границе подобласти) и дальнодействующую гладкую часть (вычисляется на грубой сетке для всей области, требует небольших временных затрат и межпроцессорных коммуникаций). Показана масштабируемость и эффективность алгоритма для сеток с числом узлов порядка 10^9.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (08-01-00615), интеграционного проекта N.26 (математические модели, численные методы и параллельные алгоритмы для решения больших задач СО РАН и их реализация на многопроцессорных суперЭВМ).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Кукшева Э.А., Снытников В.Н.* Параллельный алгоритм решения задач гравитационной физики, основанный на декомпозиции области // Вычислительные методы и программирование, Т.11, сс.168-175, 2010.
2. *Balls G.T., Collela P.* A finite difference domain decomposition method using local corrections for the solution of Poisson's equation // Journal of Computational Physics. 180(1):25-53, 2002
3. *Вшивков В.А., Снытников В.Н., Снытников Н.В.* Моделирование трехмерной динамики вещества в гравитационном поле на многопроцессорных ЭВМ // Вычислительные технологии, Т. 11, N.2, 2006.

РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ ДВУХФАЗНОЙ ЖИДКОСТИ БЕЗ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ С МЕНЯЮЩИМСЯ ИНТЕРФЕЙСОМ

Страховская Л.Г.

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

Метод конечных суперэлементов Р.П. Федоренко предлагается для расчета течения двухфазной жидкости без перемешивания, для моделирования которого используется одножидкостный (one-fluid) подход [1]. Две фазы жидкости описываются одной системой уравнений Навье-Стокса, а различие свойств учитывается в разрыве коэффициентов уравнений на границе раздела областей разных фаз. Свободная поверхность между жидкостями называется интерфейсом. Для его определения используется вспомогательная функция (функция уровня или level set функция [2]). Функция уровня описывается уравнением переноса, имеет нулевой уровень на интерфейсе, противоположные по знаку значения в разных областях и позволяет описывать изменение положения свободной границы. Приводятся результаты расчетов.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ грант № 08-01-00299)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Милютин Д.С., Страховская Л.Г.* Развитие метода конечных суперэлементов для задач гидродинамики. Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН.

2009, №81, С.12

2. *Osher S.J., Fedkiw R.P.* Level Set Method and Dynamic Implicit Surfaces. N.Y. Springer, 2003. 273 p.

МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ИЗМЕРЕНИЙ ЭЛЕКТРОННОЙ МИКРОСКОПИИ И АЛГОРИТМЫ ИХ ОБРАБОТКИ

Сыпченко М.В.

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», Москва

Предложен метод математического моделирования измерений электронной микроскопии, включающий в себя алгоритм моделирования ориентаций отдельных зерен и ядерный метод вычисления характеристик материалов по полученным данным. В работе проведено численное исследование влияния параметров задачи на результаты расчетов.

В настоящее время активно развиваются методы электронной микроскопии, использующиеся при изучении физических свойств материалов. В связи с этим актуальными являются вопросы обработки экспериментальных данных, точности проводимых вычислений.

В данной работе проводилось моделирование ориентаций отдельных зерен специализированным методом [1]. Для определения функции распределения зерен по ориентациям использовался ядерный метод [2].

В работе изучалась точность проводимых вычислений в зависимости от выбора ядра сглаживания, параметра сглаживания дискретных данных. Показано, что лучший результат дает ядро Епанечникова. В работе предложены два метода выбора параметра сглаживания при работе с реальными данными.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Borovkov M. and Savyolova T.* The Computational Approaches to Calculate Normal Distributions on the Rotation Group. / J. Appl. Cryst., 2007, v. 40, p. 449 - 455
2. *Савелова Т.И., Сыпченко М.В.* Вычисление функции распределения ориентаций по набору отдельных ориентировок на группе вращений SO(3) / Журнал вычислительной математики и математической физики, №6 (2007), т. 47, с. 970 - 982.

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ЗАДАЧИ КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТРЕТЬЕГО РОДА

Чикина Л.Г., Шабас И.Н.
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
ЮГИНФО ЮФУ, Ростов-на-Дону

Используя методику, предложенную в [1], на основе принципа максимума получены априорные оценки решения нестационарного трехмерного уравнения конвекции-диффузии, записанного в недивергентной форме через правую часть уравнения, граничные условия третьего рода и начальные данные.

Аппроксимация задачи переноса проведена в два этапа. Сначала проведена аппроксимация по пространственным переменным. Использованы разности против потока и условие М-матричности разностного оператора по пространству с исключением значений решения в граничных точках области [2].

Для неявной операторно-разностной схемы справедливы оценки
при условии консервативности вещества ($\beta = 0$)

$$\|s\|_C \le \|S_0\|_{C_h} + T\,\|f\|_{\overset{\circ}{C}} + \max_{n\ge 0}\left\|\frac{f^n_{ijk}}{b}\right\|_{C^*} + \left\|\frac{a}{b}\right\|_{C^*},$$

при условии неконсервативности вещества ($\beta > 0$)

$$\|s\|_C \le \|S_0\|_{C_h} + \max_{n\ge 0}\left\|\frac{f^n_{ijk}}{\beta_{ijk}}\right\|_{\overset{\circ}{C}} + \max_{n\ge 0}\left\|\frac{f^n_{ijk}}{\beta_{ijk}-b}\right\|_{C^*} + \left\|\frac{a}{\beta_{ijk}-b}\right\|_{C^*},$$

при $a = \sum\limits_{\Theta=W,S,B,T,N,E} \delta_\Theta \frac{r_\Theta}{g_\Theta}\Theta^p_{ijk}$, $b = \sum\limits_{\Theta=W,S,B,T,N,E} \delta_\Theta\left(1+\frac{p_\Theta}{g_\Theta}\right)\Theta^p_{ijk}$, где Θ^p_{ijk} – коэффициент схемы в приграничном узле для соответствующей границы, $p_\Theta, g_\Theta, r_\Theta$ – коэффициенты разностного аналога граничных условий, δ_Θ – символ Кронеккера для соответствующей границы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 09-01-00023.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Устойчивость разностных схем. М.: Наука, 1973.
2. *Чикина Л.Г., Шабас И.Н.* Условия диссипативности и М-матричности разностного оператора конвекции-диффузии с граничными условиями третьего рода. // Вычислительные технологии. Том 10, №6, 2004.-с. 101-111.

ПРОСТРАНСТВЕННО ТРЕХМЕРНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА ГИДРОДИНАМИКИ МЕЛКОВОДНЫХ ВОДОЕМОВ

Чистяков А.Е.
ТТИ ЮФУ, Таганрог

Прибрежные водные экосистемы, к которым относят Азовское море, Таганрогский залив и Северный Каспий другие относятся к мелководным водоемам, для которых характерны большие градиенты солености, температуры, а также развитый турбулентный обмен, в том числе по вертикальному направлению.

Универсальным методом исследования и прогнозирования развития этих систем является математическое моделирование, которое позволяет избежать дорогостоящих натурных экспериментов. Используемые в настоящее время математические модели водных экосистем в основном базируются на гидростатическом приближении. Данный подход в условиях развитого турбулентного обмена по вертикали влияющего на температурные и газовые режимы, а также биологические субстанции является достаточно грубым, поэтому тема диссертационной работы, в которой построен и численно реализован комплекс трехмерных математических моделей с учетом реальных факторов: силы Кориолиса, турбулентного обмена, сложной геометрии дна и береговой линии, испарения, стока рек, ветровых течений и трения о дно, является актуальным. Другое обстоятельство определяющее актуальность работы связано с разработкой параллельных алгоритмов задач гидродинамики на системах с массовым параллелелизмом, поскольку задачи прогнозирования течений растворенных загрязняющих веществ должны решаться в реальном или ускоренном масштабах времени, на сетках включающих тысячу узлов по каждому направлению.

ДВУМЕРНАЯ МГД - МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ ПЛАЗМЕННОЙ КОНФИГУРАЦИИ В МАГНИТНОЙ ЛОВУШКЕ ТИПА "ПОЯС"

Чмыхова Н.А.
Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

Построена двумерная МГД - модель течения плотной, горячей плазмы в плоскости магнитного поля двух погруженных в плазму проводников. В расчетах исследован процесс формирования квазистационарной плазменной конфигурации с помощью возрастания тока в проводнике.

Работа примыкает к области исследований широкого класса двумерных процессов, математического моделирования плазменных конфигураций в плотной горячей токонесущей плазме в плоскости магнитного поля сложной конфигурации.

В настоящей работе рассматривается двумерная (плоская) математическая модель формирования плазменной конфигурации в магнитной ловушке. Предлагаемая модель представляет собой шнур прямоугольного сечения с двумя параллельными одинаковыми токами, погруженными в объем плазмы. Ее следует рассматривать как простой прямой аналог ловушки нового типа - "Галатея - Пояс", предложенных А.И. Морозовым [1-2].

Из результатов первых расчетов следует, что в них реализуется предполагаемая схема формирования конфигурации "Пояс", опробованная в одномерной модели [3] - задачи о сжатии плазмы в цилиндрической ловушке с прямолинейным изолированным проводником с током. Прослеживается тенденция к сгребанию основной массы плазмы к оси и магнитной изоляции проводников от омывающей их плазмы, под действием созданного продольного тока отрицательного направления вблизи проводников. Такой ток в плазме создается на короткой нестационарной стадии процесса в результате возрастания тока в проводнике, за счет задания возрастающего магнитного поля на границе с ним. Аналогичный механизм рассмотрен в работе Г.И. Дудниковой и др. [4]. Конфигурация существует в квазиравновесном режиме, за счет высокой проводимости плазмы.

Численное решение МГД - задачи, реализовано методом коррекции потоков (FCT) [5].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ грант № 09-01-00181)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Морозов А.И., Савельев В.В.* О Галатеях - ловушках с погруженными в плазму проводниками. Усп. физ. наук. 1998. Т. 168. № 11. С. 1153-1194.
2. *Брушлинский К.В., Савельев В.В.* Магнитные ловушки для удержания плазмы. Матем. моделирование. 1999. Т. 11. № 5. С. 3-36.
3. *Брушлинский К.В., Чмыхова Н.А.* О равновесии плазмы в магнитном поле ловушек - галатей. Математическое моделирование. 2010 (в печати)
4. *Дудникова Г.И. и др.* Численное моделирование прямых плазменных конфигураций - Галатей типа "Пояс". Физика плазмы. 1997. Т. 23. № 5 С. 387-396.
5. *Оран Э., Борис Дж.* Численное моделирование реагирующих потоков. М.: Мир. 1990.

Содержание